精算概论

陈孝伟 南开大学金融学院

chenx@nankai.edu.cn

2024年春

精算概论：课程简介与安排

- 0.1 精算与精算师职业（6课时）
- 0.2 寿险产品定价与准备金评估（15课时）
- 0.3 非寿险产品定价与准备金评估（12课时）
- 0.4 金融机构资产负债管理（3课时）
- 0.5 保险公司内含价值评估（3课时）
- 0.6 金融机构资本管理与偿付能力管理（6课时）
- 0.7 社会保险领域的精算问题（3课时）
- 0.8 精算的最新发展（3课时）

南開大學 Nankai University

第二章：寿险产品定价与准备金评估

1 生命表基础
- 生命表的概念与示例
- 生命表的构成要素及其数学关系
- 生命表的理论基础
- 生命表的应用

2 寿险产品的精算定价

3 寿险产品定价实务

4 寿险准备金的概念与计算

5 寿险准备金评估实务

Nankai University

生命表的概念及示例

- 定义：生命表是根据以往一定时期内各种年龄的死亡统计资料编制的，由每个年龄死亡率所组成的汇总表。
- 生命表的内容：死亡率、生存率、死亡人数、生存人数、平均余命等
- 生命表分类：
  - 国民生命表，是根据全体国民或者以特定地区的人口的死亡统计数据编制的生命表。它主要来源于人口普查的统计资料。
  - 经验生命表（死亡率表），是根据人寿保险、社会保险以往的死亡记录(经验)所编制的生命表。保险公司使用的是经验生命表，主要因为国民生命表是全体国民生命表，没有经过保险公司的风险选择，一般情况下与保险公司使用的生命表中的死亡率不同。

国民生命表是反映一个国家或地区的人口死亡率、死亡人数及各年龄的生命期望等生命函数的生命表。它以一国或一地区的全体国民为统计对象，对一定期间内的死亡人数数据、人口普查（人口动态统计，人口静态统计）所得各年龄段的人口数等各种数据加以整理而得。反映某一群人自零岁起逐年发生死亡，直至全部死亡的过程记录。

国民生命表分为完全生命表和简易生命表。完全生命表是根据准确的人口普查资料，依年龄差别计算出的死亡率、生存率、平均余命等生命函数编制的；简易生命表则采用每年的人口动态统计资料和人口抽样调查的统计资料，按年龄差别(如5岁或10岁为一区间）计算死亡率、生存率、平均余命等生命函数编制的。

南开大学 Nankai University

生命表：死亡率的影响因素

影响死亡率的因素

身体/健康方面

- 年龄
- 性别
- 种族
- 健康状况

➢身体状况
  - ➢ 体格：身高、体重（身高体重对照表）
  - ➢ 神经系统、消化系统、心血管系统、呼吸系统、泌尿生殖系统、内分泌系统等

➢既往病史

➢家族病史

生活方式方面

- 职业：含是否职业流动
- 危险运动与业余爱好：高风险运动
- 生活习惯：运动、饮食、睡眠等
- 吸烟、酒精、药物等
- 其它

宏观环境方面

- 地理位置
- 生活环境
- 社会环境

问题：比较胖人和瘦人之间的死亡率？

生命表示例（只含死亡率）

中国人身保险业经验生命表（2010－2013）-死亡率						
	非养老类业务一表		非养老类业务二表		养老类业务表	
年龄	男(CL1)	女(CL2)	男（CL3）	女（CL4）	男（CL5）	女（CL6）
10	0.000269	0.000145	0.000187	0.000103	0.000146	0.000074
11	0.000293	0.000157	0.000202	0.000105	0.000157	0.000077
12	0.000319	0.000172	0.00022	0.000109	0.00017	0.00008
13	0.000347	0.000189	0.00024	0.000115	0.000184	0.000085
14	0.000375	0.000206	0.000261	0.000121	0.000197	0.00009
15	0.000402	0.000221	0.00028	0.000128	0.000208	0.000095
16	0.000427	0.000234	0.000298	0.000135	0.000219	0.0001
17	0.000449	0.000245	0.000315	0.000141	0.000227	0.000105
18	0.000469	0.000255	0.000331	0.000149	0.000235	0.00011
19	0.000489	0.000262	0.000346	0.000156	0.000241	0.000115
20	0.000508	0.000269	0.000361	0.000163	0.000248	0.00012
21	0.000527	0.000274	0.000376	0.00017	0.000256	0.000125
22	0.000547	0.000279	0.000392	0.000178	0.000264	0.000129
23	0.000568	0.000284	0.000409	0.000185	0.000273	0.000134
24	0.000591	0.000289	0.000428	0.000192	0.000284	0.000139
25	0.000615	0.000294	0.000448	0.0002	0.000297	0.000144
26	0.000644	0.0003	0.000471	0.000208	0.000314	0.000149
27	0.000675	0.000307	0.000497	0.000216	0.000333	0.000154
28	0.000711	0.000316	0.000526	0.000225	0.000354	0.00016
29	0.000751	0.000327	0.000558	0.000235	0.000379	0.000167
30	0.000797	0.00034	0.000595	0.000247	0.000407	0.000175

南開大學 Nankai University

中国寿险业经验生命表

1999.12

1 .非养老金业务男表，简称**CL1(1990-1993)**
2 .非养老金业务女表，简称**CL2(1990-1993)**
3 .非养老金业务男女表，简称**CL3(1990-1993)**
4 .养老金业务男表，简称**CL4(1990-1993)**
5 .养老金业务女表，简称**CL5(1990-1993)**
6 .养老金业务男女表，简称**CL6(1990-1993)**

1 .非养老金业务男表，简称**CL1(2000-2003)**
2 .非养老金业务女表，简称**CL2(2000-2003)**
3 .养老金业务男表，简称**CL3(2000-2003)**
4 .养老金业务女表，简称**CL4(2000-2003)**

2005.12

定期寿险、终身寿险、健康保险应该采用非养老类业务一表；保险期间内（不含满期）没有生存金给付责任的两全保险或含有生存金给付责任但生存责任较低的两全保险、长寿风险较低的年金保险应该采用非养老类业务二表；保险期间内（不含满期）含有生存金给付责任且生存责任较高的两全保险、长寿风险较高的年金保险应该采用养老类业务表。

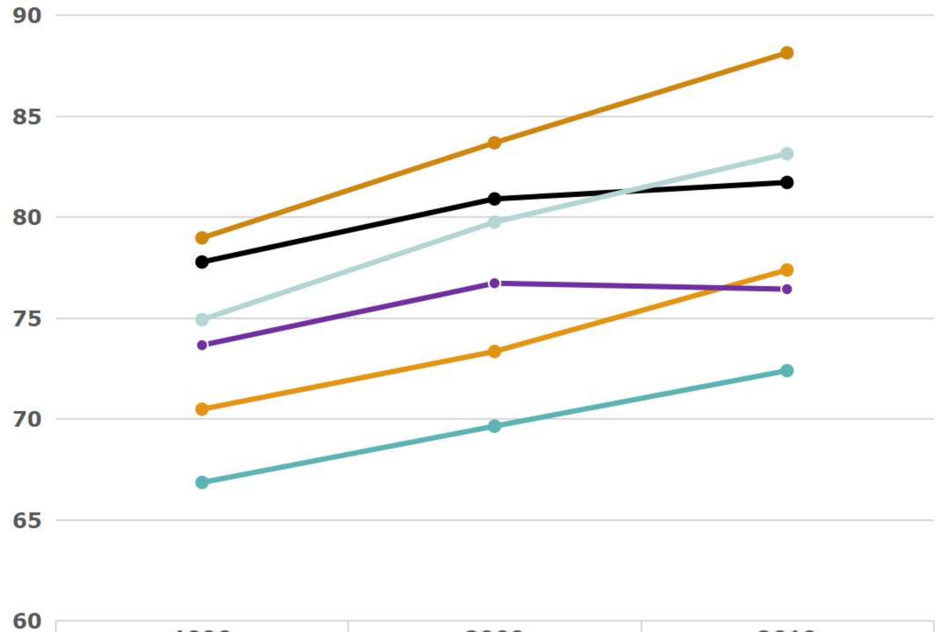
2016.12

1.CL1(2010－2013)：非养老类业务一表(男)
2.CL2(2010－2013)：非养老类业务一表(女)
3.CL3(2010－2013)：非养老类业务二表(男)
4.CL4(2010－2013)：非养老类业务二表(女)
5.CL5(2010－2013)：养老类业务表(男)
6.CL6(2010－2013)：养老类业务表(女)

南開大學
Nankai University

生命表：国民生命表与经验生命表的比较

平均寿命比较



	1990	2000	2010
国民（男）	66.84	69.63	72.38
国民(女)	70.47	73.33	77.37
非养老金（男）	73.64	76.71	76.42
非养老金（女）	77.76	80.89	81.71
养老金（男）	74.91	79.74	83.13
养老金（女）	78.96	83.67	88.13

国民生命表婴儿死亡率变化（‰）

年份	男	女
1990	32. 36	33. 48
2000	23. 92	33. 75
2010	13. 62	14. 3

经验生命表（非养老金）（‰）

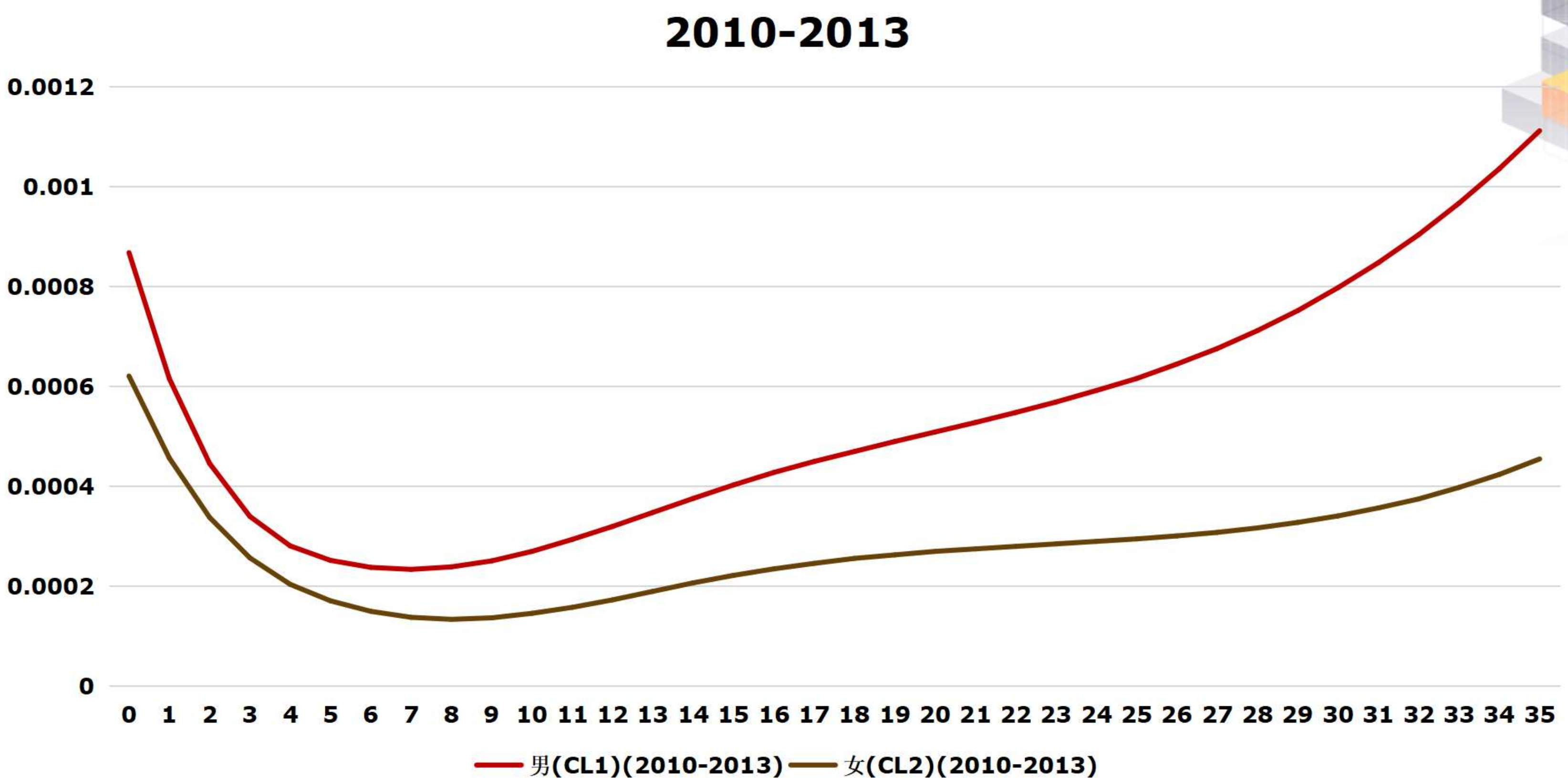
年份	男	女
1990	3. 04	2. 77
2000	0. 72	0. 66
2010	0. 87	0. 62

经验生命表（养老金）（‰）

年份	男	女
1990	2. 73	2. 49
2000	0. 63	0. 58
2010	0. 57	0. 45

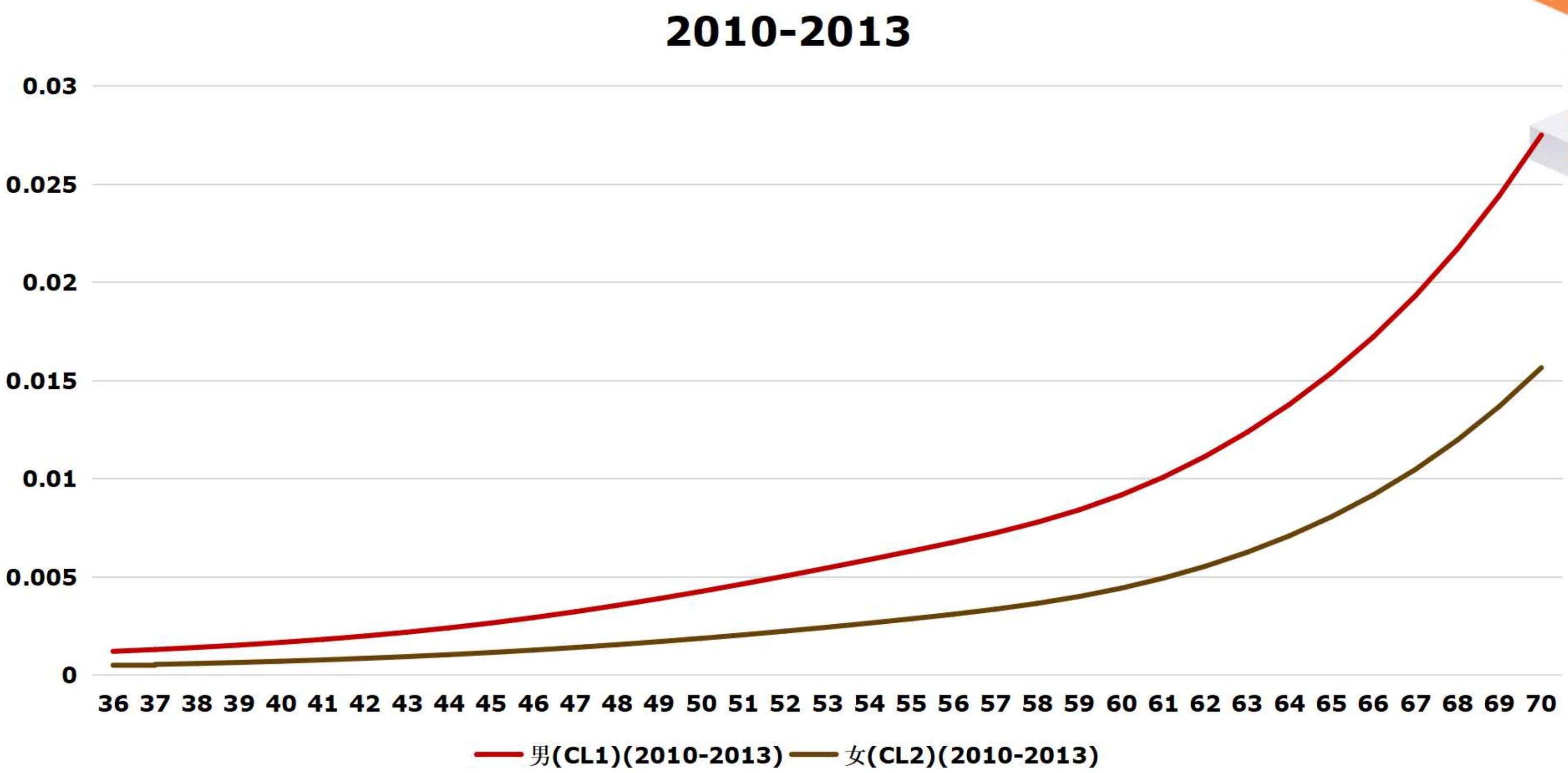
南開大學 Nankai University

生命表:性别差异



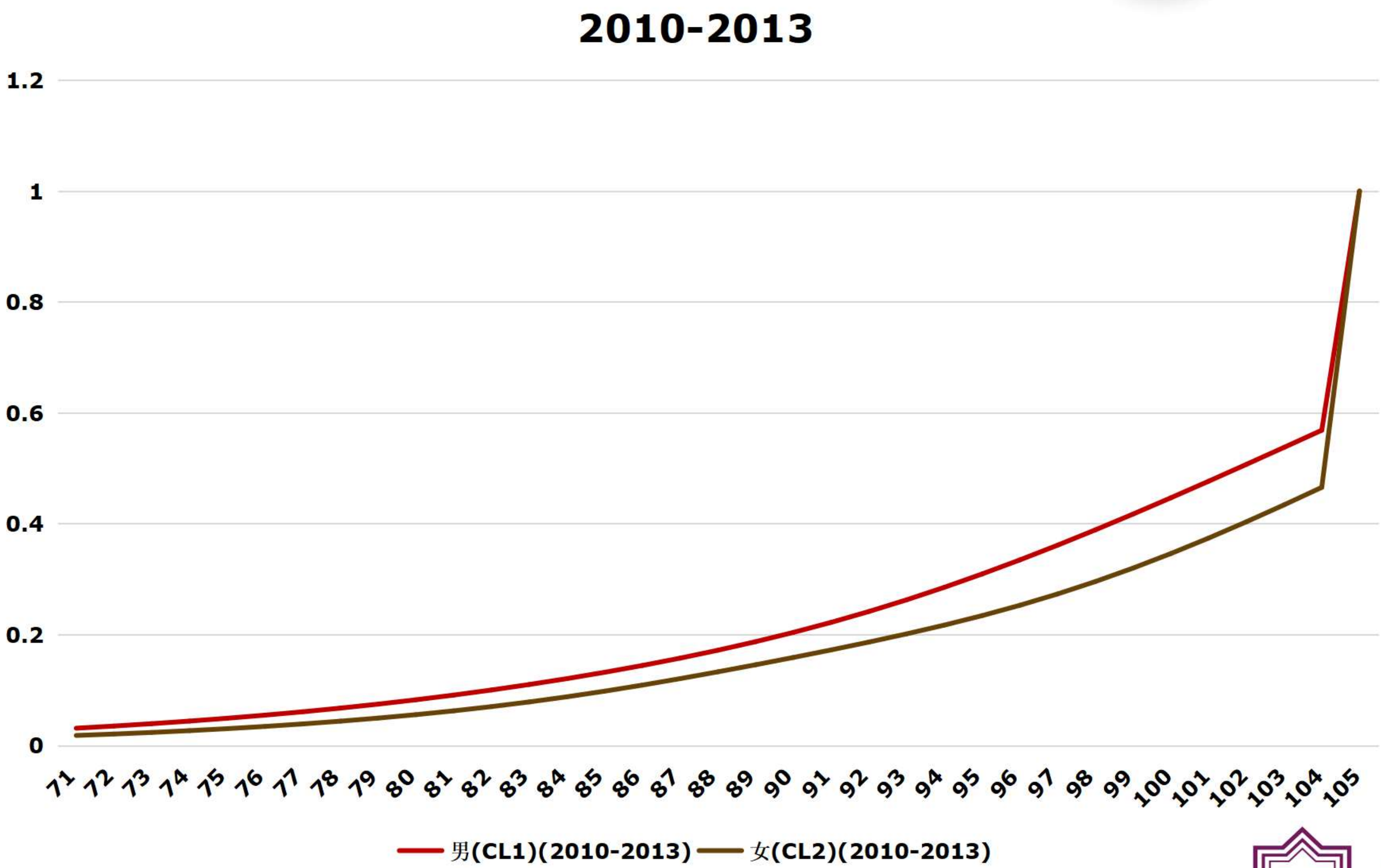
Nankai University

生命表:性别差异



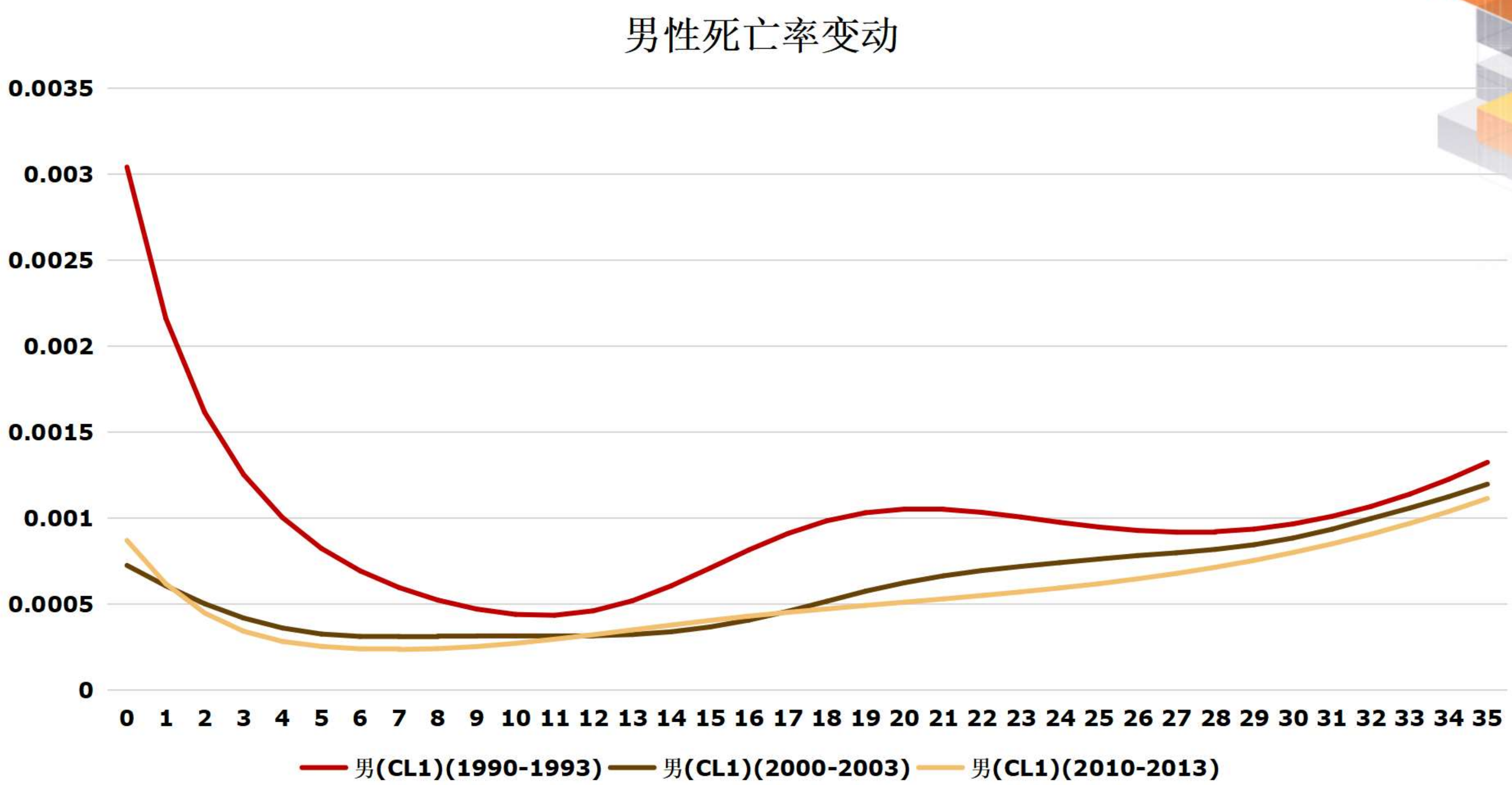
Nankai University

生命表:性别差异



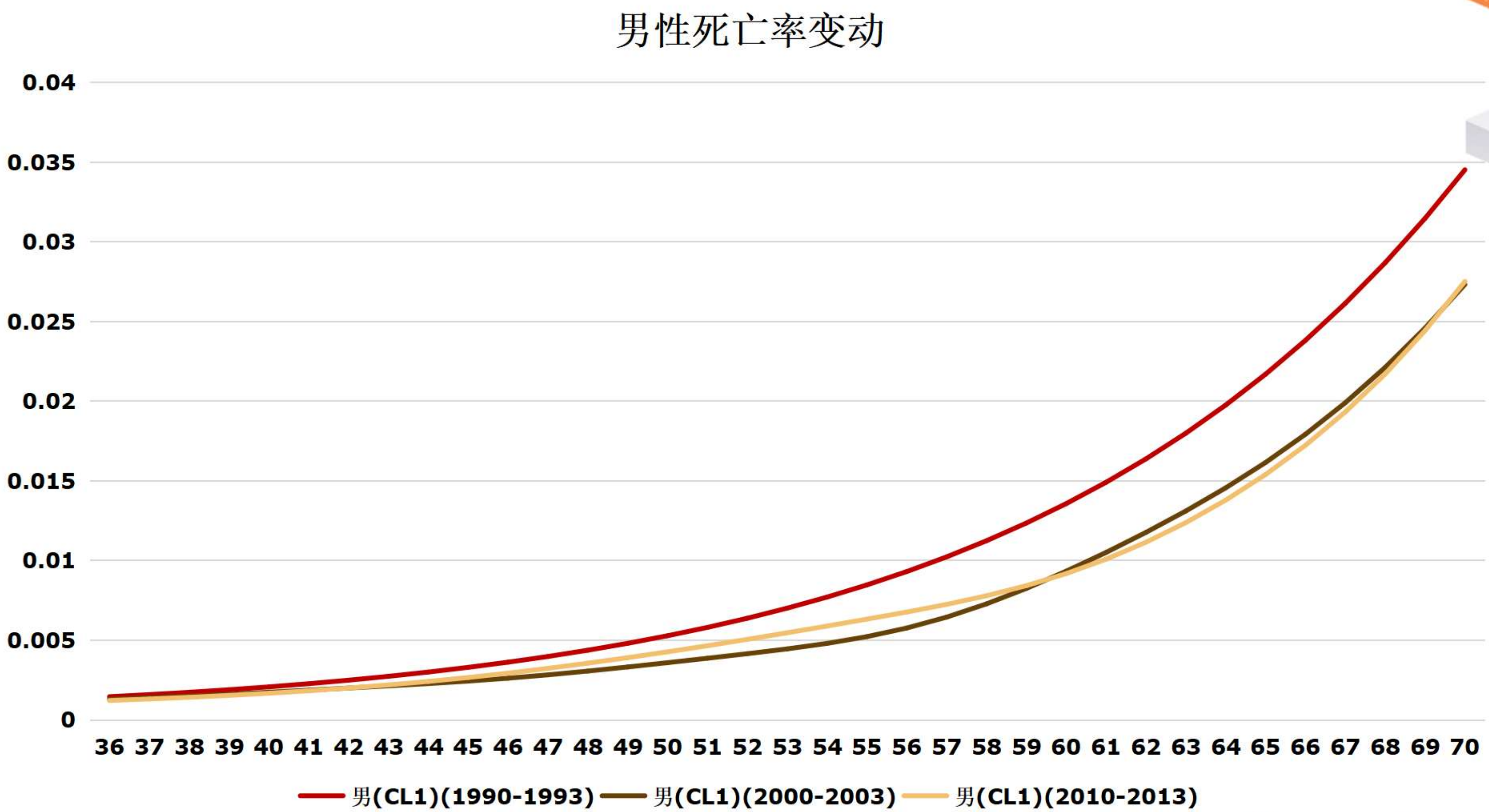
Nankai University

生命表：变动趋势



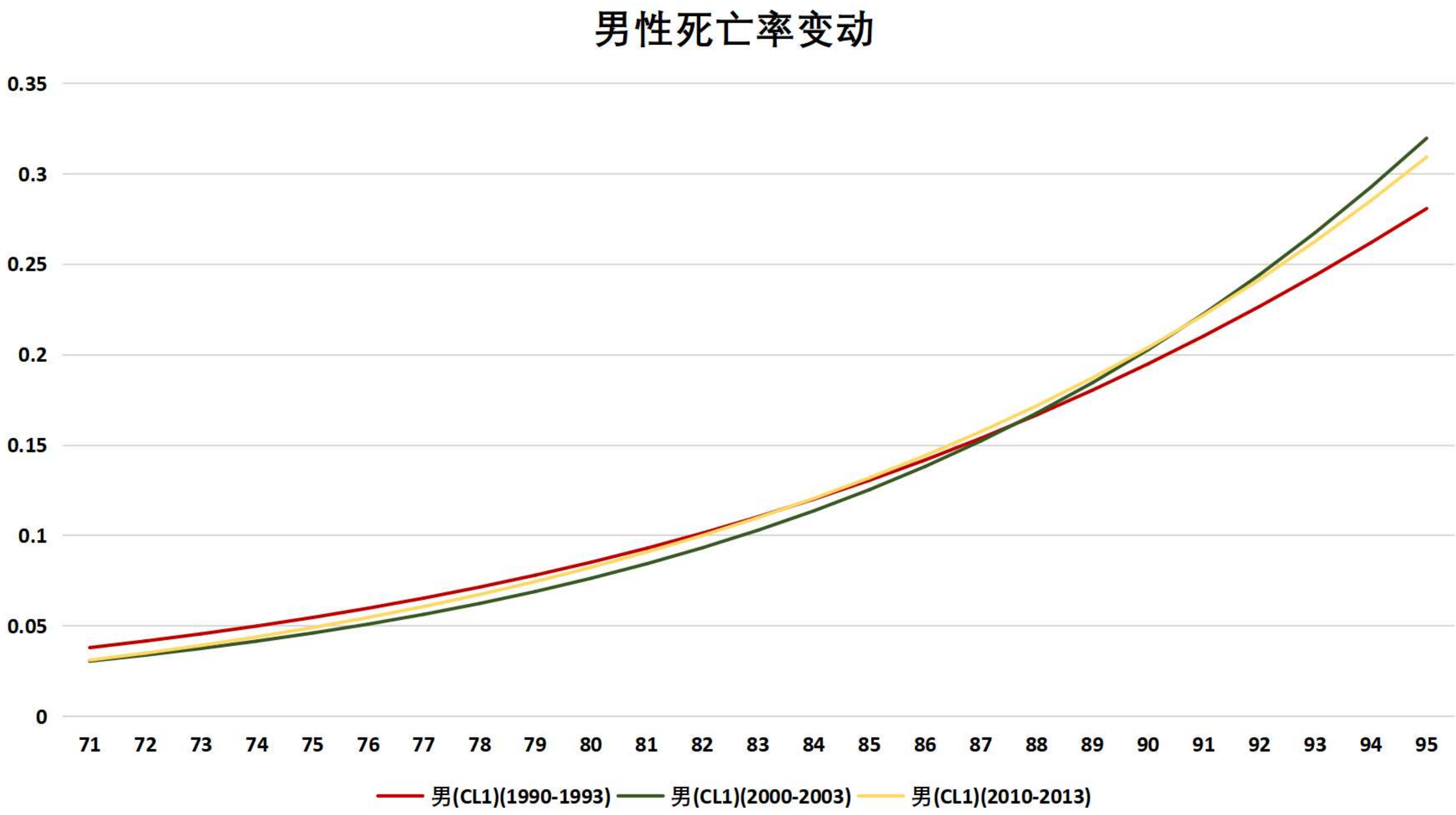
南開大學
Nankai University

生命表：变动趋势



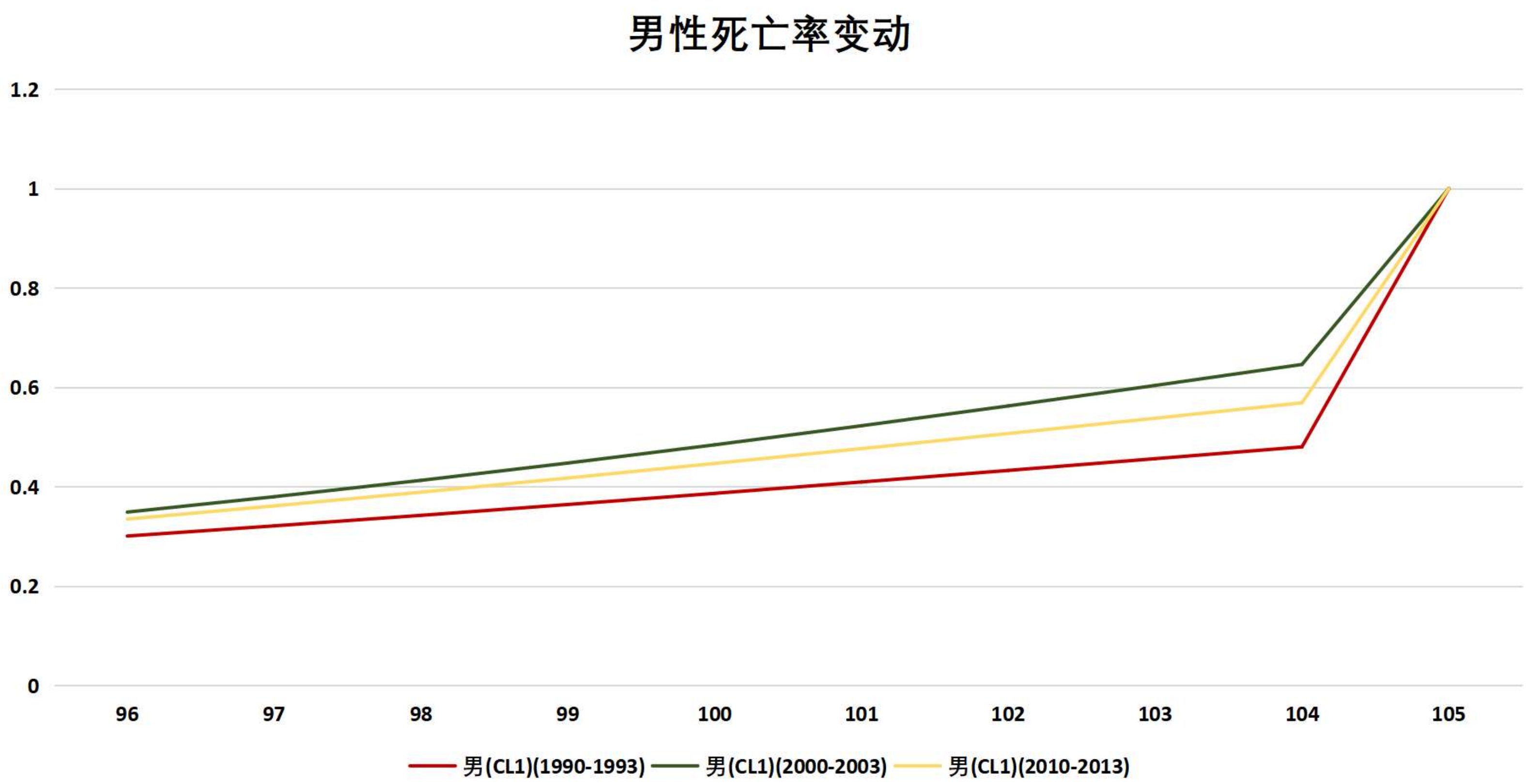
南開大學 Nankai University

生命表：变动趋势



Nankai University

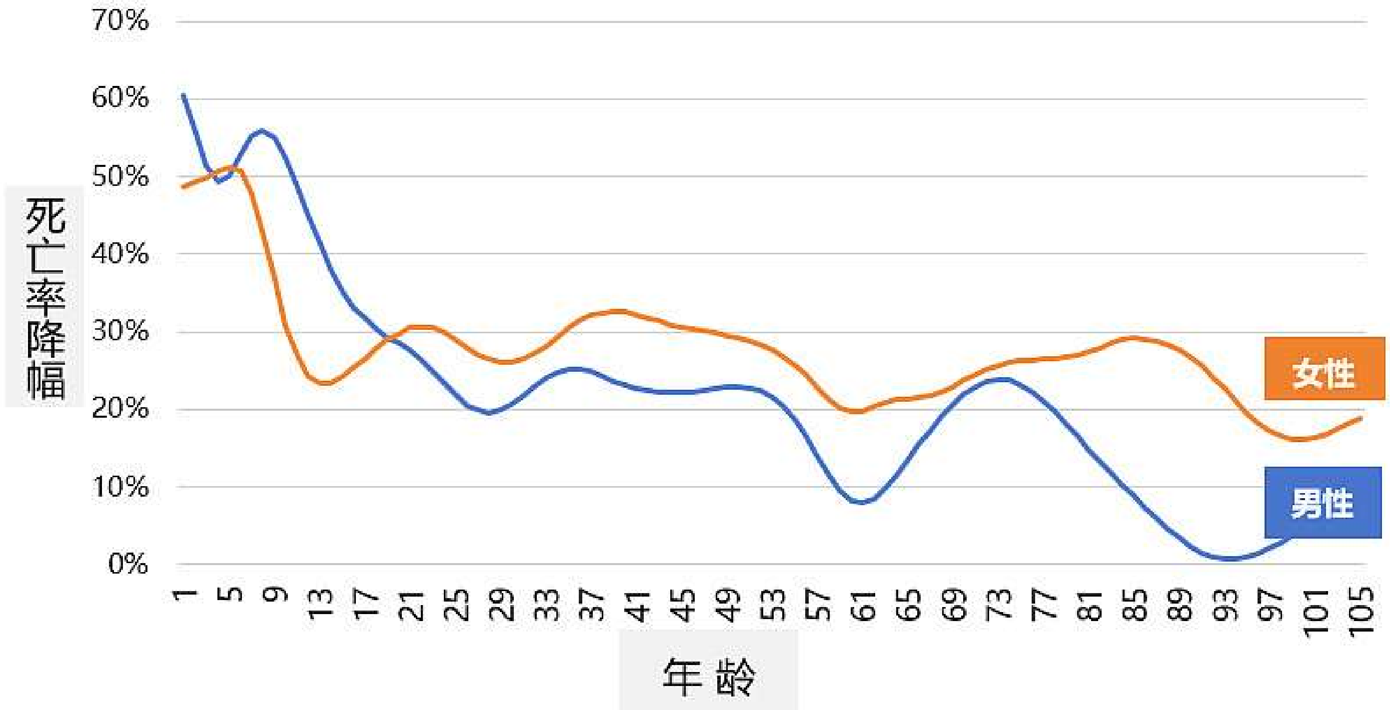
生命表：变动趋势



男性死亡率变动
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
男(CL1)(1990-1993)
男(CL1)(2000-2003)
男(CL1)(2010-2013)

生命表的最新实践

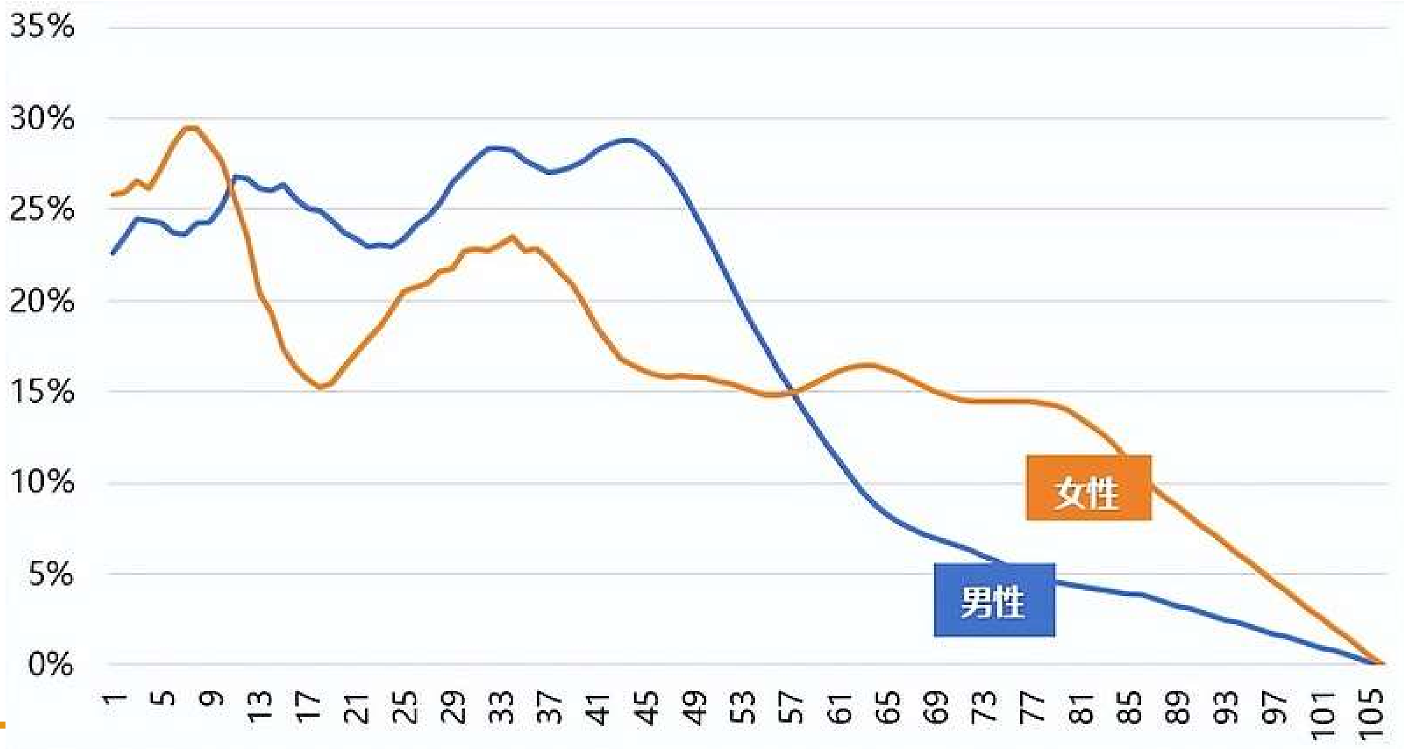
- 中国精算师协会向各家险企下发《中国人身保险业经验生命表(2023）（征求意见稿）》，这是中国的第四套生命表
- 第四套生命表的CL1-3的死亡率，相较第三套平均下降20%左右



思考：
定期寿险会更贵还是更便宜？
养老金呢？

大湾区生命表

- 第四套生命表新增大湾区版本
- **55**岁以内死亡率大湾区比全国版低**15%**以上



生命表的要素及其数学关系

- x：表示年龄，ω表示最高年龄。
- l_x：生存数，是指从初始年龄至满x岁尚生存的人数。例：l_{25}表示在初始年龄定义的基数中（l_0表示0岁时的生存人数，即基数。通常可以选择10000，100000或1000000）有l_{25}人活到25岁。
- d_x：死亡数，是指x岁的人在一年内死亡的人数，即指x岁的生存数人中，经过一年所死去的人数。已知在$x+1$岁时生存数为l_{x+1}，于是有$d_x = l_x - l_{x+1}$。

生命表的要素及其数学关系

- q_x： 死亡率，表示*x*岁的人在一年内死亡的概率。

  显然 $q_x = d_x / l_x$， 所以有q_ω=1
- p_x： 生存率。表示*x*岁的人在一年后仍生存的概率，即到

  x +1岁时仍生存的概率。

  则 $p_x = l_{x+1} / l_x$， 所以 $p_x + q_x = 1$
- e_x： 平均余命或生命期望值。表示*x*岁的人以后还能生存的平均年数。

  若假设死亡发生在每一年的年中，则有

$$e_x = (l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots\ldots) / l_x + 1/2$$

当x=0时，平均余命即为平均寿命。

南開大學 Nankai University

生命表的要素及其数学关系

练习：推导过程

- ${}_tp_x$： 表示x岁的人在 t 年末仍生存的概率。

  则 ${}_tp_x = l_{x+t} / l_x = p_x \times p_{x+1} \times \ldots \times p_{x+t-1}$

- ${}_tq_x$： 表示x岁的人在 t 年内死亡的概率。

  则 ${}_tq_x =(l_x-l_{x+t})/ l_x$， 所以${}_tp_x+{}_tq_x=1$

- ${}_{t|u}q_x$： 表示x岁的人在生存t年后u年内死亡的概率。

  则 ${}_{t|u}q_x =(l_{x+t} - l_{x+t+u})/ l_x$

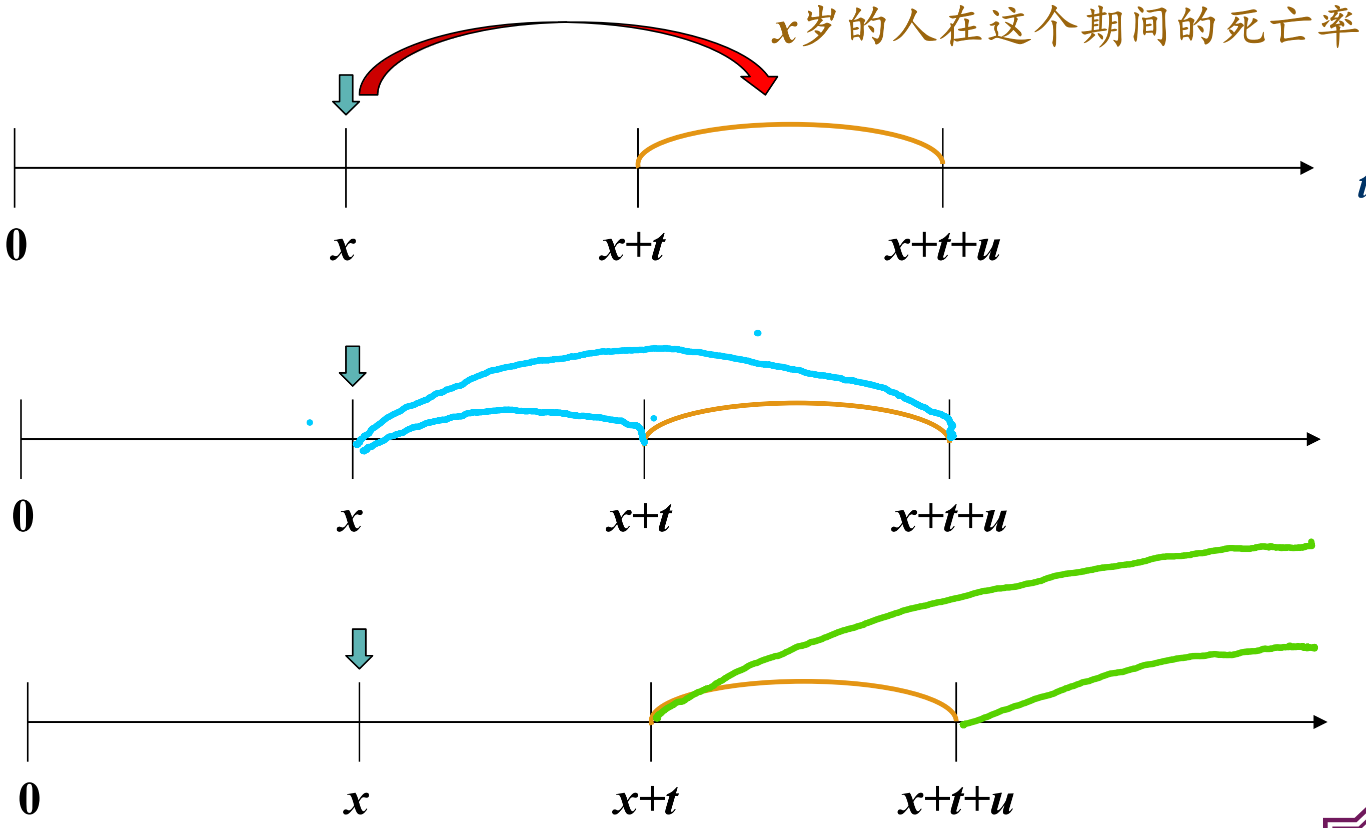
  $${}_{t|u}q_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x \times {}_uq_{x+t}$$

当u=1时，${}_{t|}q_x$用表示x岁的人在生存t年后的那一年(t+1年)中死亡的概率。

$${}_{t|}q_x = {}_tp_x - {}_{t+1}p_x = {}_{t+1}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x \times q_{x+t}$$

生命表的要素及其数学关系

- ${}_{t|u}q_x$ 和 ${}_{t|}q_x$ 的理解：



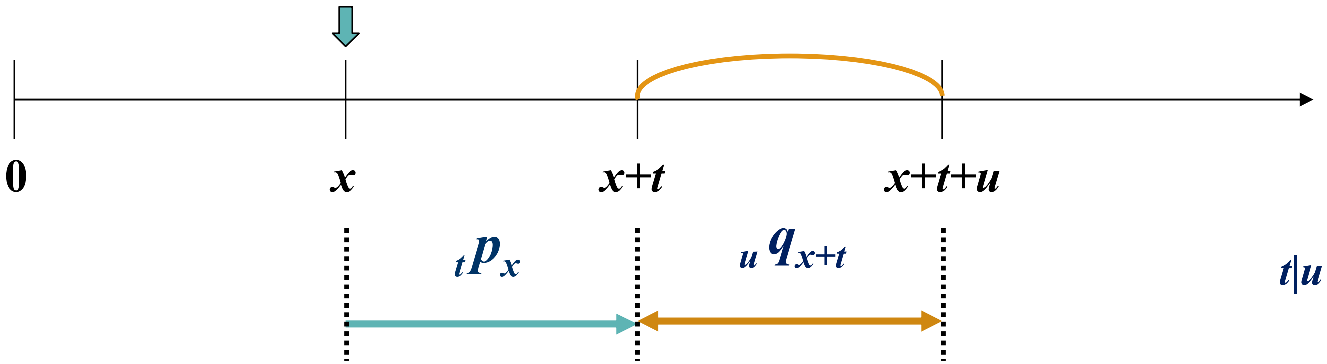
$${}_{t|u}q_x = (l_{x+t} - l_{x+t+u})/\,l_x$$

$${}_{t|u}q_x = {}_{t+u}q_x - {}_{t}q_x$$

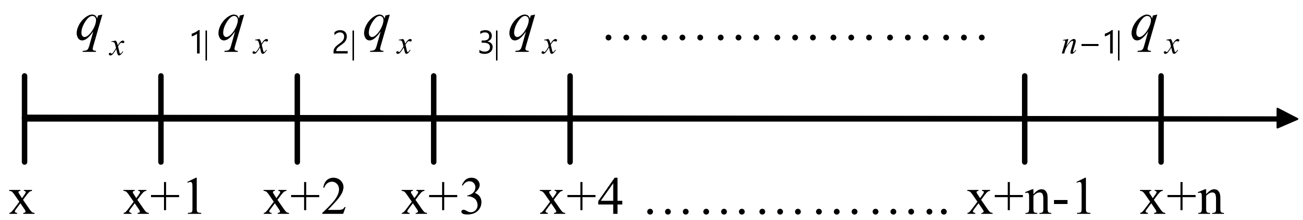
$${}_{t|u}q_x = {}_{t}p_x - {}_{t+u}p_x$$

生命表的要素及其数学关系

- ${}_{t|u}q_x$ 和 ${}_{t|}q_x$ 的理解：



$${}_{t|u}q_x = {}_tp_x \times {}_uq_{x+t}$$



${}_{t|}q_x$ 的含义

Nankai University

生命表的要素及其数学关系

- 平均寿命和平均余命e_x的理解
  - 平均寿命：每个人平均生存的年数。
  - e_x表示现年x岁的人尚可再生存若干年的平均数，亦即每一个到达x岁的人，其今后仍可生存的平均年数。
  - 问题：假设平均寿命为75岁，那45岁人的平均余命为多少？
  - 问题：为什么45岁人的平均余命大于30？

假设世界上只有3个人，A、B和C，分别生存的年数为：A=30，B=50，C=70，则三个人的平均寿命为(30+50+70)/3=50。
问：40岁的平均余命是多少？
答：[(50-40)+(70-40)]/2=20

南开大学 Nankai University

生命表：平均余命示例

中国人寿保险业经验生命表（2010－2013）女(CL6)								
年龄	余命	余命差额	年龄	余命	余命差额	年龄	余命	余命差额
0	88.13129		**36**	52.48789	-0.98659	**71**	19.3568	-0.86775
1	87.171	-0.96029	**37**	51.50229	-0.9856	**72**	18.49853	-0.85827
2	86.19606	-0.97494	**38**	50.51785	-0.98444	**73**	17.65043	-0.8481
3	85.21183	-0.98423	**39**	49.53471	-0.98314	**74**	16.8138	-0.83663
4	84.22234	-0.98949	**40**	48.55296	-0.98175	**75**	15.99075	-0.82305
5	83.23029	-0.99205	**41**	47.57267	-0.98029	**76**	15.18416	-0.80658
6	82.23724	-0.99305	**42**	46.59386	-0.97881	**77**	14.39742	-0.78674
7	81.24362	-0.99362	**43**	45.61664	-0.97722	**78**	13.63394	-0.76348
8	80.24959	-0.99402	**44**	44.64102	-0.97562	**79**	12.89677	-0.73717
9	79.25533	-0.99426	**45**	43.66703	-0.97399	**80**	12.18823	-0.70854
10	78.261	**-0.99433**	**46**	42.69468	-0.97236	**81**	11.50973	-0.6785
11	77.26676	-0.99425	**47**	41.72394	-0.97074	**82**	10.86182	-0.64791
12	76.27267	-0.99409	**48**	40.75488	-0.96906	**83**	10.2443	-0.61752
13	75.27873	-0.99394	**49**	39.78756	-0.96733	**84**	9.656403	-0.58789
14	74.28509	-0.99364	**50**	38.82204	-0.96551	**85**	9.097052	-0.55935
15	73.29173	-0.99336	**51**	37.85848	-0.96356	**86**	8.564948	-0.5321
16	72.29865	-0.99308	**52**	36.89704	-0.96144	**87**	8.0583	-0.50665
17	71.30583	-0.99282	**53**	35.93785	-0.95919	**88**	7.575832	-0.48247
18	70.31326	-0.99256	**54**	34.9811	-0.95675	**89**	7.116136	-0.4597
19	69.32094	-0.99232	**55**	34.02699	-0.95411	**90**	6.677728	-0.43841
20	68.32886	-0.99208	**56**	33.07567	-0.95132	**91**	6.259025	-0.4187
21	67.337	-0.99186	**57**	32.12738	-0.94829	**92**	5.858287	-0.40074
22	66.34535	-0.99164	**58**	31.18239	-0.945	**93**	5.473577	-0.38471
23	65.35385	-0.9915	**59**	30.24095	-0.94144	**94**	5.102648	-0.37093
24	64.36254	-0.99131	**60**	29.30344	-0.9375	**95**	4.742847	-0.3598
25	63.37142	-0.99112	**61**	28.37028	-0.93317	**96**	4.391116	-0.35173
26	62.38047	-0.99095	**62**	27.44184	-0.92844	**97**	4.044406	-0.34671
27	61.3897	-0.99078	**63**	26.51846	-0.92338	**98**	3.699428	**-0.34498**
28	60.39907	-0.99062	**64**	25.60034	-0.91812	**99**	3.352046	-0.34738
29	59.40866	-0.99041	**65**	24.68769	-0.91265	**100**	2.996444	-0.3556
30	58.4185	-0.99016	**66**	23.78081	-0.90688	**101**	2.623819	-0.37262
31	57.42864	-0.98986	**67**	22.88027	-0.90054	**102**	2.220202	-0.40362
32	56.43923	-0.98941	**68**	21.98685	-0.89341	**103**	1.762641	-0.45756
33	55.45031	-0.98892	**69**	21.10139	-0.88547	**104**	1.212141	-0.5505
34	54.46201	-0.98829	**70**	20.22455	-0.87683	**105**	0.5	-0.71214

- 差值绝对值偏大（接近1）表示什么含义。
- 差值偏小表示什么含义。

南開大學
Nankai University

生命表：例题与练习

1. 根据下表求50岁的人在52-53岁之间的死亡率。

年龄	死亡率	期初生存人数	死亡人数
50	0.003570	949,840	3,391
51	0.003847	946,449	3,641
52	0.004132	942,808	3,896

$$ {}_{2|}q_{50} = \frac{l_{51}}{l_{50}} \cdot \frac{l_{52}}{l_{51}} \cdot \frac{d_{52}}{l_{52}} = \frac{3896}{949840} = 0.00410 $$

➢ 其他的计算方法？

生命表：例题与练习

2. 根据下面生命表的数据可以得到：

年龄	未来一年内死亡率
30	0.00133
31	0.00134
32	0.00137
33	0.00142
34	0.00150
35	0.00159
36	0.00170
37	0.00183
38	0.00197
39	0.00213

- 查表可得34岁的人在35岁以前死亡的概率：

$$q_{34}=0.00150$$

- 那么34岁的人在35岁仍活着的概率为：

$$p_{34}=1-q_{34}=0.99850$$

- 34岁的人在两年后仍活着的概率为：

$$ {}_2p_{34}=p_{34}\times p_{35}=p_{34}\times(1-q_{35})$$
$$=0.99850\times(1-0.00159)=0.99691$$

- 34岁的人在两年之内死亡的概率为：

$$ {}_2q_{34}=1-{}_2p_{34}=0.00309$$

- 34岁的人在36岁至37岁之间死亡的概率为：

$$ {}_{2|}q_{34}={}_2p_{34}\times q_{36}=0.99691\times0.00170=0.00169$$

南開大學 Nankai University

生命表：例题与练习

3. 已知20岁的生存人数为1,000， 21岁的生存人数为998，22岁的生存人数为992。求20岁的人在21岁那年死亡的概率：

$$ {}_{1|}q_{20} = (998-992)/1{,}000 = 0.006 $$

4. 已知40岁的死亡率为0.04，41岁的死亡率为0.06，而42岁的人生存至43岁的概率为0.92。如果40岁生存人数为100人，求43岁时的生存人数为。

$$ l_{41} = 100 \times (1-0.04) = 96 $$

$$ l_{42} = 96 \times (1-0.06) = 90.24 $$

$$ l_{43} = 90.24 \times 0.92 = 83.02 $$

生命表的理论基础：连续模型

分布函数：用 X 表示新生婴儿未来寿命的随机变量（其中 X 是一个连续型的随机变量），则 X 的分布函数 $F(x)$ 可以表述为：

$$F(x) = \Pr(X \le x) \qquad (x \ge 0)$$

显然有 $F(0) = 0$。

X 的概率密度函数为 $f(x)$，则：

$$f(x) = F'(x) \quad \text{或} \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad (x \ge 0)$$

$\Pr(X > x)$ 表示 0 岁的人在 x 岁以后死亡的概率，即在 x 岁仍然生存的概率，于是有：

$$\Pr(X > x) = 1 - \Pr(X \le x) = 1 - F(x)$$

$E(X)$ 表示 X 的期望值，即新生婴儿的平均寿命，则：

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx$$

生命表的理论基础：连续模型

生存函数：记新生婴儿的生存函数为$s(x)$，它表示 0 岁的人活过x岁的概率,即在x岁以后死亡的概率。于是有：

$$s(x)=\Pr(X>x)=1\text{-}F(x) \qquad (x\geq 0)$$

显然有$s(0)=1$，$s(x)$单调递减函数。

$\Pr(x<X\leq z|X>x)$表示新生婴儿在x岁仍存活的条件下，于年龄区间$(x,z](x<z)$岁去世的条件概率，具体表达式如下：

$$\Pr(x<X\leq z|X>x)=\frac{\Pr(x<X\leq z)}{\Pr(X>x)}=\frac{\mathrm{F}(z)-\mathrm{F}(x)}{1-\mathrm{F}(x)}=\frac{\mathrm{s}(x)-\mathrm{s}(z)}{\mathrm{s}(x)}=1-\frac{\mathrm{s}(z)}{\mathrm{s}(x)}$$

更一般地，可用$\Pr(y<X\leq z|X>x)$表示新生婴儿在x岁仍存活的条件下，于年龄区间$(y,z](x\leq y<z)$岁去世的条件概率，具体表达式如下：

$$\Pr(y<X\leq z|X>x)=\frac{\Pr(y<X\leq z)}{\Pr(X>x)}=\frac{\mathrm{F}(z)-\mathrm{F}(y)}{1-\mathrm{F}(x)}=\frac{\mathrm{s}(y)-\mathrm{s}(z)}{\mathrm{s}(x)}$$

Nankai University

生命表的理论基础：连续模型

余命的生存分布：用 (x) 表示一个 x 岁的人，$T(x)=X-x$ 表示 (x) 的余命的随机变量。用 $F_T(t)$ 表示 $T(x)$ 的分布函数，则：

$$F_T(t)=\Pr(T(x)\le t)=\Pr(X\le x+t\,|\,X>x)=\Pr(x<X\le x+t\,|\,X>x)$$

$$=\frac{\mathrm{F}(x+t)-\mathrm{F}(x)}{1-\mathrm{F}(x)}=\frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}\qquad(t\ge 0)$$

用 $f_T(t)$ 表示 T 的概率密度函数，则

$$f_T(t)=F_T'(t)=-\frac{s'(x+t)}{s(x)}$$

根据 ${}_tq_x$ 、${}_tp_x$ 和 ${}_{t|u}q_x$ 的含义，则

$${}_tq_x=\Pr[T(x)\le t]=\frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}\qquad(t\ge 0)$$

$${}_tp_x=1-{}_tq_x=\Pr[T(x)>t]=\frac{s(x+t)}{s(x)}\qquad(t\ge 0)$$

$${}_{t|u}q_x=\Pr(t<T(x)\le t+u)=\frac{s(x+t)-s(x+t+u)}{s(x)}\qquad(t\ge 0)$$

练习：用生存分布函数推导该式的三个表达式。

$${}_{t|u}q_x$$

$$={}_tp_x-{}_{t+u}p_x$$

$$={}_{t+u}q_x-{}_tq_x$$

$$={}_tp_x\times{}_uq_{x+t}$$

南开大学 Nankai University

生命表的理论基础：连续模型

例：已知 $s_X(x)=1-\dfrac{x}{100}$（$x\leqslant 100$），求 ${}_{10}p_{30}$ 和 ${}_{10|5}q_{25}$。

解：$${}_{10}p_{30}=\frac{s(40)}{s(30)}=\frac{(1-40/100)}{(1-30/100)}=6/7=0.8571$$

$${}_{10|5}q_{25}={}_{10}p_{25}\cdot{}_{5}q_{35}=\frac{s(35)}{s(25)}\cdot\left(1-\frac{s(40)}{s(35)}\right)=\frac{s(35)-s(40)}{s(25)}$$

$$=\frac{(1-35/100)-(1-40/100)}{1-25/100}=0.067$$

南開大學 Nankai University

生命表的理论基础：连续模型

死力（死亡强度）：死力是指存活至 x 岁的人在该时点瞬间死亡率的度量单位，用 μ_x 表示，

用生存函数的相对变化率 $-\dfrac{s'(x)}{s(x)}$ 来定义，由于 $s(x)$ 是减函数，所以式中加负号。于是有：

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{s(x)-s(x+\Delta x)}{\Delta x} \frac{1}{s(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{F'(x)}{1-F(x)}$$

即可得到下式成立：

$$s(x) = \exp(-\int_0^x \mu_s ds)$$

$${}_t p_x = \exp(-\int_x^{x+t} \mu_y dy) = \exp(-\int_0^t \mu_{x+s} ds)$$

用 $f_T(t)$ 表示 T 的概率密度函数，则

$$f_T(t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)}[-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}] = {}_t p_x \mu_{x+t} \qquad (t \geq 0)$$

$E(\mathrm{T})$ 表示 X 的余命的期望值

则平均余命：

$$E(\mathrm{T}) = \int_0^{+\infty} tf(\mathrm{t})dt$$

南開大學

Nankai University

生命表的理论基础：连续模型

例：假设 $\mu_x=\dfrac{1}{1+x}, x\geq 0$。求：

(1) X 的分布函数与密度函数；

(2) $T(x)$ 的分布函数与密度函数；

(3) $\Pr(20<x\leq 40)$；

(4) ${}_{5|5}q_{25}$。

解：(1) $F_X(x)=1-\exp(-\int_0^x \frac{1}{1+s}ds)$

$$=1-\exp(-\ln(1+x))$$

$$=\frac{x}{1+x} \qquad (x\geq 0)$$

$$f_X(x)=F_X'(x)=\frac{1}{(1+x)^2} \qquad (x\geq 0)$$

(2) $F_T(t)=1-\exp(-\int_0^t \frac{1}{1+x+s}ds)$

$$=1-\exp(-\ln(\frac{1+x+t}{1+x}))$$

$$=\frac{t}{1+x+t} \qquad (x\geq 0, t\geq 0)$$

$$f_T(t)=F_T'(t)=\frac{1+x}{(1+x+t)^2} \qquad (x\geq 0, t\geq 0)$$

(3) $\Pr(20<x\leq 40)=F(40)-F(20)=\frac{40}{1+40}-\frac{20}{1+20}\approx 0.02323$

(4) ${}_{5|5}q_{25}=\dfrac{s(30)-s(35)}{s(25)}=\dfrac{F(35)-F(30)}{1-F(25)}\approx 0.1165$

南開大學 Nankai University

生命表的理论基础：离散模型

离散型余命的生存分布：用 K(x)表示(x)的取整余命（也可简记为 K），根据 T(x)的含义，则有： K(x)= [T(x)]，这表示 K(x)是不超过 T(x)的最大整数。

$$\Pr[K(x)=k]=\Pr[k\le T(x)<k+1]\qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

因为 $T(x)$ 是连续型随机变量，$\Pr[T(x)=k]=\Pr[T(x)=k+1]=0$，所以

$$\Pr[k\le T(x)<k+1]=\Pr[k<T(x)\le k+1]$$

作业：求K的期望值，并解释其含义。

于是离散型随机变量 K(x)的概率分布律又可以表示为：

$$\Pr[K(x)=k]=\Pr[k<T(x)\le k+1]={}_{k|}q_x=\frac{s(x+k)-s(x+k+1)}{s(x)}$$

$$={}_{k+1}q_x-{}_{k}q_x={}_{k}p_x-{}_{k+1}p_x={}_{k}p_x\ q_{x+k}={}_{k|}q_x$$

生命表的应用：如何构建

选择观察的时间段

（如**2010.1.1-2013.12.31**）

→

将进入观察期的被保险人按照设计的信息结构进行分别统计：险种类型、性别、年龄、是否吸烟，……。

→

具有相同特征的数据信息归为一组，譬如：死亡保险/男性/不吸烟/**20**岁，观察此人群在**20-21**岁之间的死亡人数，除以人群总数得到该年龄的粗死亡率。

↓

相同的方法得到不同特征下的各年龄的粗死亡率。

→

对于低龄和高龄：由于没有充足的数据，可以利用数学模型推导出死亡率结果。

→

利用修匀、生命表构造等技术得到完整的各年龄死亡率分布。

↓

根据各年龄死亡率，假设**0**岁的人口基数，计算得出各年龄生存率、死亡人数、生存人数和平均余命等，得到完整的生命表。

→

死亡类保险不吸烟男性生命表
死亡类保险吸烟男性生命表
死亡类保险不吸烟女性生命表
死亡类保险吸烟女性生命表

可以有更详细的分类。

Nankai University

生命表的应用：经验生命表分类

- 经验生命表的种类：由于参加保险的被保险人是否进行了选择（核保），以及选择经过了多长时间对死亡率产生影响，因此经验生命表根据选择性质的不同分为：选择生命表、终极生命表和综合生命表。用K表示选择影响持续的时间，在K年内，选择对死亡率的影响是逐年递减的，超过K年后，选择影响消失。
  - 选择生命表
  - 终极生命表
  - 综合生命表

生命表的应用：经验生命表分类

- 选择生命表：根据曾经接受选择的被保险人的信息编制的生命表，所以此表可以显示选择的效力。因为有选择效力的存在，所以影响死亡率的因素，除了年龄外，还有投保时间。例如一位30岁的被保险人于今年投保，其死亡率必小于一位在29岁时投保的30岁的被保险人，而此二者的死亡率又小于一位在28岁时投保的30岁的被保险人。

假设$q_{[x]+n}$表示 $x+n$岁的人于x岁投保，已经过了n个保单年的死亡率，则上述的选择效力可表示为：

$$q_{[30]} < q_{[29]+1} < q_{[28]+2}$$

通常选择效力会随时间经过而逐渐消失，即当n越大，$q_{[x-n]+n}$ 与 $q_{[x-n+1]+n-1}$ 会趋于相等，故称选择效果尚存在的这段时间为选择期间，既K，时间通常为五年。

南開大學 Nankai University

生命表的应用：经验生命表分类

- 终极生命表：根据选择效力消失以后的经验资料来编制的生命表，称为终极生命表。若选择效力为五年，则根据被保险人投保五年后的资料而编成。假设投保年龄最低为18岁，则终极生命表的最早年龄为23岁。当选择效力消失后，投保人不再具备选择优势，因此相同年龄下，终极生命表上的死亡率大于选择生命表上的死亡率。
- 综合生命表：包括各种死亡统计，即根据发行保单后的起初数年以及以后各年间的死亡记载编成。所以凡是到达某一指定年龄的所有被保险人的资料，均应结合成该年龄集团，然后根据其死亡经验来编制综合生命表。该生命表不考虑保险合同投保后的经过年数，而以全期间合同的被保险人的全部资料编制生命表，因此综合生命表的死亡率介于选择生命表死亡率与终极生命表死亡率之间。

Nankai University

生命表的应用：选择-终极表示例

[x]	选择表					终极表	
	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	$q_{[x]+4}$	q_{x+5}	x+5
70	0.0175	0.0249	0.0313	0.0388	0.0474	0.0545	75
71	0.0191	0.0272	0.0342	0.0424	0.0518	0.0596	76
72	0.0209	0.0297	0.0374	0.0463	0.0566	0.0652	77
73	0.0228	0.0324	0.0409	0.0507	0.0620	0.0714	78
74	0.0249	0.0354	0.0447	0.0554	0.0678	0.0781	79
75	0.0273	0.0387	0.0489	0.0607	0.0742	0.0855	80
76	0.0298	0.0424	0.0535	0.0664	0.0812	0.0936	81
77	0.0326	0.0464	0.0586	0.0727	0.0889	0.1024	82
78	0.0357	0.0508	0.0641	0.0796	0.0973	0.1121	83
79	0.0391	0.0556	0.0702	0.0871	0.1065	0.1227	84

选择-终极表示例

选择表是一个二维表，其中的死亡率要由两个变量决定，一个是选择年龄，另一个是选择经过的年数或是到达年龄。该表的选择期间是五年，即从选择年龄往后五年以内需要承认选择的影响，采用选择表中的死亡率。例如，选择年龄在74岁的人在78岁的死亡率为：

$$q_{[74]+4} = 0.0678$$

$$q_{[74]+4} \neq q_{78}$$

从选择年龄经过五年以后就不计选择的影响，采用终极表中的死亡率。例如，选择年龄分别为70岁、71岁、72岁和73岁的人，在78岁的死亡率均为0.0714，即：

$$q_{[70]+8} = q_{78} = 0.0714$$

$$q_{[71]+7} = q_{78} = 0.0714$$

$$q_{[72]+6} = q_{78} = 0.0714$$

$$q_{[73]+5} = q_{78} = 0.0714$$

从选择表的左下至右上可以作数条连线，同一连线上的数据表示同一到达年龄但不同选择年龄的死亡率。例如，在到达年龄77岁这条斜线上可以查到如下的死亡率：

$$q_{[77]} = 0.0326$$

$$q_{[76]+1} = 0.0424$$

$$q_{[75]+2} = 0.0489$$

$$q_{[74]+3} = 0.0554$$

$$q_{[73]+4} = 0.0620$$

南开大学 Nankai University

生命表的应用

➢ 保险公司的经验生命表：基于核保基础的选择

核保基本原则

➢对投保人/被保险人进行风险评估和风险选择的过程
➢是决定是否及以何种方式、条件（包括价格）承保的过程
➢是控制风险（包括道德风险和逆选择风险）的过程
➢包含对投保申请是否承诺、拒绝或提出反要约的过程
➢核保环节把好关，可以在很大程度上减少未来的纠纷。

客户公平

公司获利

综合平衡以下因素：

（1）定价的公平性要求

➢ 达到精算公平要求，往往要求较细致的分类
➢ 竞争考虑：避免竞争劣势

（2）运营的效率与可操作性

➢ 需要较粗的风险分类保证大数定律对每个类别有足够数量的被保险人的要求
➢ 特别是标准体人数应足够多，保证经营的稳定和效率
  ➢ 美国：4/5标准体，1/8优质体。
➢ 管理费用控制要求

（3）社会可接受

➢ 社会公众对核保要素的接受程度
➢ 某些国家/地区：种族因素

核保结果

- 标准体
- 优质体
- 次标准体
  - 次标准体1
  - 次标准体2
  - ……
- 拒保体

- 核保的过程包括2个必要的部分：
  - 选择。是保险人对于每个申请寿险的被保险人的风险程度进行评估以确定他的风险程度；
  - 分类。是将被保险人分配到预期损失概率，即死亡率近似相同的群体中。对被保险人的所有信息审核以后，核保人将被保险人分入某一个风险等级。风险等级是指该团体中的被保险人的风险对于该保险公司而言是相似的，他们享有同样的费率标准。
- 每个保险公司的实力不同，发展战略不同，经验的积累也不同，因此保险公司的核保标准亦有所不同。这主要表现为：
  - 保险公司对于所有被保险人的风险分类标准不同
  - 每类之间的相差程度不同
  - 公司拒保的标准不同等
- 每个等级内的平衡
  - 在确定了风险分类后，保险公司应对每个级别中的被保险人保持一种合理的平衡。

风险分类方法

- 数值费率系统法
  - 基本原理是将大量风险因素中的每个因素对于死亡风险的影响用统计的方法进行确定，且用百分率的方式表示，我们称之为点，100%表示正常或标准风险。
  - 任何因素对于风险的影响都是不确定的，可能是正方向影响，也可能是负方向影响，因此可分为有利因素（减点）和不利因素（加点），每个因素对于死亡风险的影响都用对应的数值进行表示。例如：如果某类被保险人的体重在某个范围内，或血压在某个范围内被认为是标准死亡的风险的150%，则规定这个体重范围和血压范围不利因素加点为50。

因素	不利因素（加点）	有利因素（减点）
体格： 超重 个人病史： 血压： 家庭病史：	 25 75 100	 10 10
总点数：100+100-10=190		

风险分类方法

- 每个保险公司都有自己的核保手册，详细规定了各种风险因素对应的数值。一般来讲，这种方法测定出来的数值在75到500或更多。保险公司按照自己的标准将所有申请人在这些数值中进行分类，例如，标准体规定在75-130之间，次标准规定为500以下，超过500的为拒保体。有些公司的核保点数范围可达到2,000，一般当总点数超过500时，其分类是属于实验性核保。
- 不同公司之间的核保决定有很大的区别，可理解为：
  - 计算数值的方法和规模不同
  - 评估加点和减点数的判断标准不同
  - 不同群体分类的标准不同
- 公司的市场策略对分类产生影响
  - A公司：对高风险人群有丰富的经验
  - B公司：适合中、低风险人群

每个保险公司都有其自己的分类标准，且A公司的次标准体也可能是B公司的标准体，C公司的拒保体也可能是D公司的次标准体。一些公司的风险分类较为保守，另外一些公司的分类则较为积极。

南開大學 Nankai University

次标准体的分类：不同的选择

加点最高限额表

年龄组	完美体	标准体	次标准体I	次标准体II	次标准体III
0-14	—	110	—	—	—
15-29	20	110	400	1200	1900
30-39	15	100	400	1200	1900
40-49	10	90	400	1200	1900
50以上	10	85	400	1200	1900

年龄组	完美体	标准体	次标I	次标II	次标III	次标IV	次标V	次标VI
0-14	—	110	—	—	—	—	—	—
15-29	20	110	160	230	400	700	1200	1900
30-39	15	100	160	220	400	700	1200	1900
40-49	10	90	135	210	400	700	1200	1900
50以上	10	85	125	205	400	700	1200	1900

假设完美体、标准体、拒保体标准相同。

保险公司的经验生命表

- 经验生命表的构成：生命表以性别和年龄为最基本的分类标准，后来保险公司加入了吸烟与不吸烟分类，另外，保险公司为了更好地分析自身的业务将点，又将被保险人按照投保金额进行分类。这样，保险公司的生命表的分类标准包括：
  - 保险业务类型（Ⅰ类、Ⅱ类、Ⅲ类）
  - 性别：男性、女性、混合
  - 年龄
  - 吸烟与不吸烟
  - 保险金额：假设将保险金额分为4类，用A、B、C、D表示

多少个？

- 业务I类保额为A类的男性不吸烟表
- 业务I类保额为A类的男性吸烟表
- 业务I类保额为A类的女性不吸烟表
- 业务I类保额为A类的女性吸烟表
- 业务I类保额为A类的男女混合吸烟表
- 业务I类保额为A类的男女混合不吸烟表

……

- 业务III类保额为D类的男性不吸烟表
- 业务III类保额为D类的男性吸烟表
- 业务III类保额为D类的女性不吸烟表
- 业务III类保额为D类的女性吸烟表
- 业务III类保额为D类的男女混合吸烟表
- 业务III类保额为D类的男女混合不吸烟表

保险公司的经验生命表

- 在每一类生命表中，保险公司又将被保险人分类若干等级，按照下表的标准可分为8种（其中完美体不含吸烟种类），则生命表的个数会很大，通常某类生命表可由表表示为：

业务I类保额为A类的男性不吸烟表

年龄	完美体	标准体	次标I	次标II	次标III	次标IV	次标V	次标VI
0								
1								
2								
……								
105								

可能还多！

Nankai University

第二章：寿险产品定价与准备金评估

1 生命表基础

2 寿险产品的精算定价

3 寿险产品定价实务

4 寿险准备金的概念与计算

5 寿险准备金评估实务

人寿、年金保险

- 人寿保险
  - 定期寿险
  - 终身寿险
  - 生存保险
  - 两全保险
- 年金保险
  - 终身年金
  - 定期年金

纯保费

- 净保费
  - 趸交
  - 期交
    - 死亡率
    - 利率

营业保费

- 毛保费
  - 趸交
  - 期交
    - 死亡率
    - 利率
    - 费用率

险种类型 | 保费类型 | 交费方式 | 定价因素

精算定价：成本定价

- 原理：收支平衡
  - 净保费：未来保险金给付的精算现值与所有净保费收入的精算现值在初始时刻相等。
  - 毛保费：未来保险金给付和费用支出的精算现值与所有毛保费收入的精算现值在初始时刻相等。

毛保费的精算现值 = 给付精算现值 + 费用精算现值 + 利润精算现值

问题：利润从哪里来？

（1）在计算保费的时候，附加一个利润项，既未来保险金给付、费用支出和预期利润的精算现值与所有毛保费收入的精算现值在初始时刻相等。

（2）不单独设立利润项，而是通过对定价假设的保守估计而包含预期利润（安全边际），最后的利润来源于死差益（实际死亡率与假设死亡率）、利差益（实际利率与假设利率）和费差益（实际费用率与假设费用率）等。

南開大學 Nankai University

精算定价：成本定价

定价假设死亡率
估计死亡率
安全边际=预期利润（死差异）

定价假设死亡率
实际死亡率
估计死亡率
实际利润<预期利润（死差益）

定价假设死亡率
估计死亡率
实际死亡率
实际利润>预期利润（死差益）

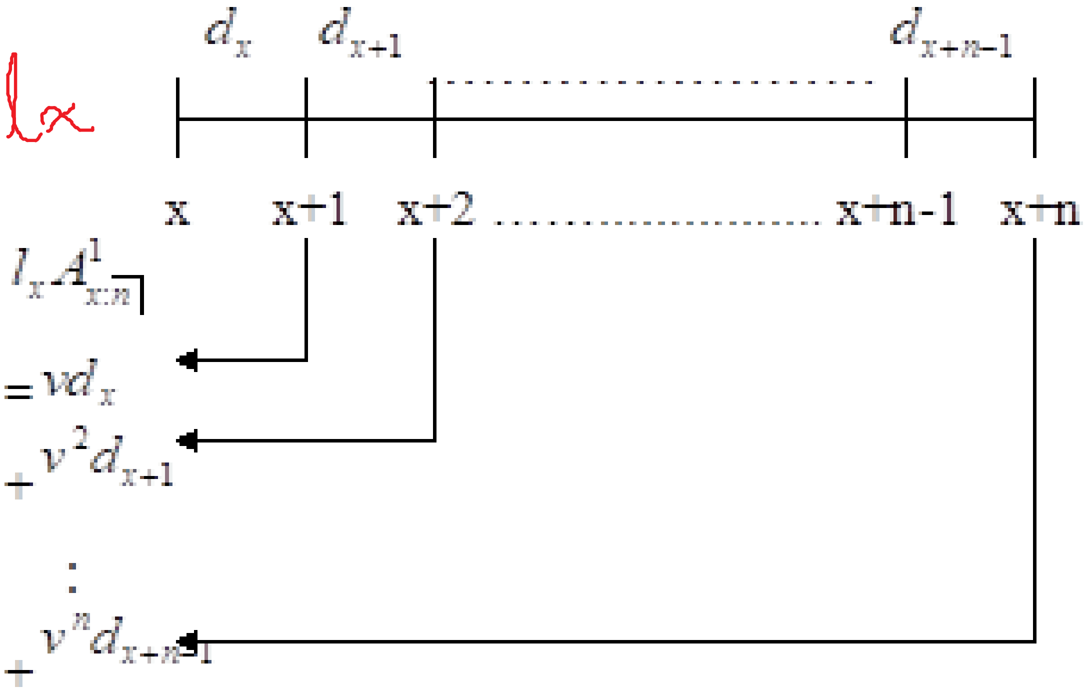
实际死亡率
定价假设死亡率
估计死亡率
实际亏损（死差损）

定价时点
①
可能结果
②
可能结果
③
可能结果

南开大学
Nankai University

定期寿险：简单模型

被保险人(x)投保n年定期保险，保险金1元，死亡保险金在死亡当年的年末支付，趸交净保费用$A_{x:\overline{n}|}^{1}$表示：



过程描述

定期寿险：简单模型

$$A_{x:\overline{n}|}^{1}=\frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\cdot d_{x+t}=\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_x$$

结果

$$l_x\cdot A_{x:\overline{n}|}^{1}=vd_x+v^2d_{x+1}+\ldots+v^n d_{x+n-1}$$

$$A_{x:\overline{n}|}^{1}=\frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\cdot d_{x+t}$$

$$A_{x:\overline{n}|}^{1}=v\frac{d_x}{l_x}+v^2\frac{d_{x+1}}{l_x}+\ldots+v^n\frac{d_{x+n-1}}{l_x}$$

$$\because\quad {}_{n|}q_x=\frac{d_{x+n}}{l_x}$$

$$\therefore\quad A_{x:\overline{n}|}^{1}=v\cdot q_x+v^2\cdot{}_{1|}q_x+\ldots+v^n\cdot{}_{n-1|}q_x$$

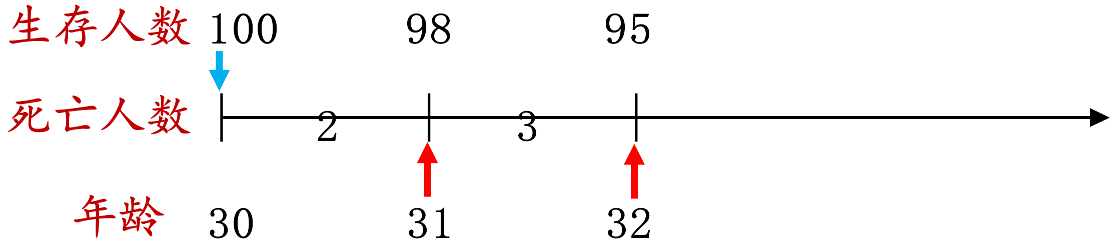
$$=\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_x$$

推导过程

Nankai University

定期寿险：例题

- 练习：2年期定期保险，年龄为30岁。已知：30岁的生存人数为100，31岁的生存人数为98，32岁的生存人数为95。保险金额为10000元，死亡保险金在死亡年末支付，利率为3%，计算趸交净保费。



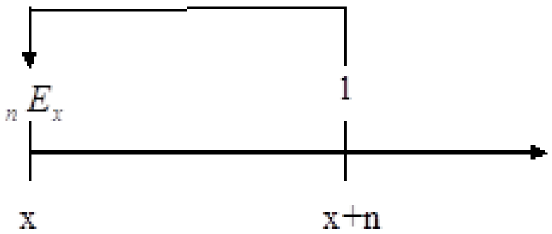
- 由已知可得：30岁的死亡人数2人，31岁的死亡人数3人。
- 用A表示本保险的趸交净保费，则：

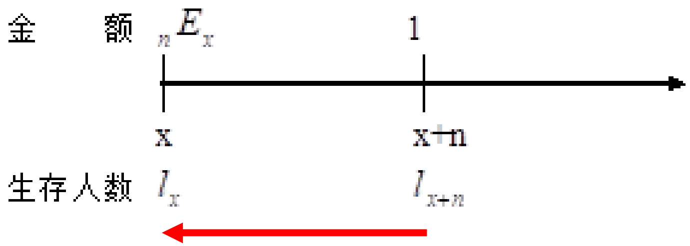
$$100 \times A = 10000 \times \left(2 \times (1+3\%)^{-1} + 3 \times (1+3\%)^{-2}\right)$$

$$A = 477\text{元}$$

生存保险：简单模型

现年x岁的人，若n年后仍生存时可得一元保险金，其现值以表示 $_nE_x$ 也称为此生存保险的趸交净保费。





收入 = 支出

$$_nE_x \cdot l_x(1+i)^n = 1 \times l_{x+n}$$

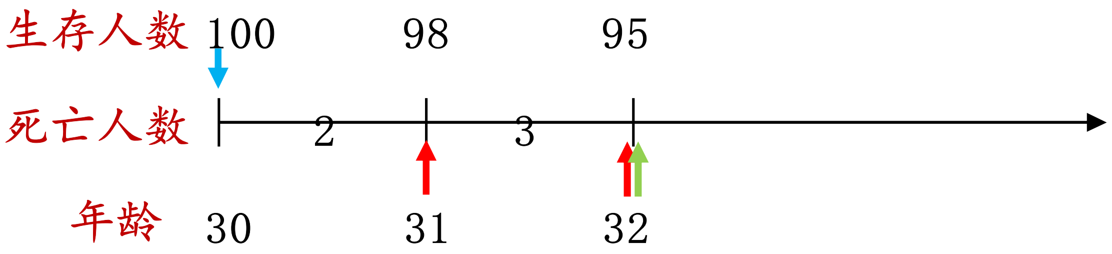
$$_nE_x \times l_x = 1 \times v^n \times l_{x+n}$$

$$\Rightarrow \quad {}_nE_x = \frac{1}{(1+i)^n} \times \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n \times {}_np_x$$

两全保险：例题

- 练习：2年期两全保险，年龄为30岁。已知：30岁的生存人数为100，31岁的生存人数为98，32岁的生存人数为95。死亡保险金保险金额为10000元，在死亡年末支付，生存保险金额为10000元，利率为3%，计算趸交净保费。

两全保险=定期寿险+生存保险

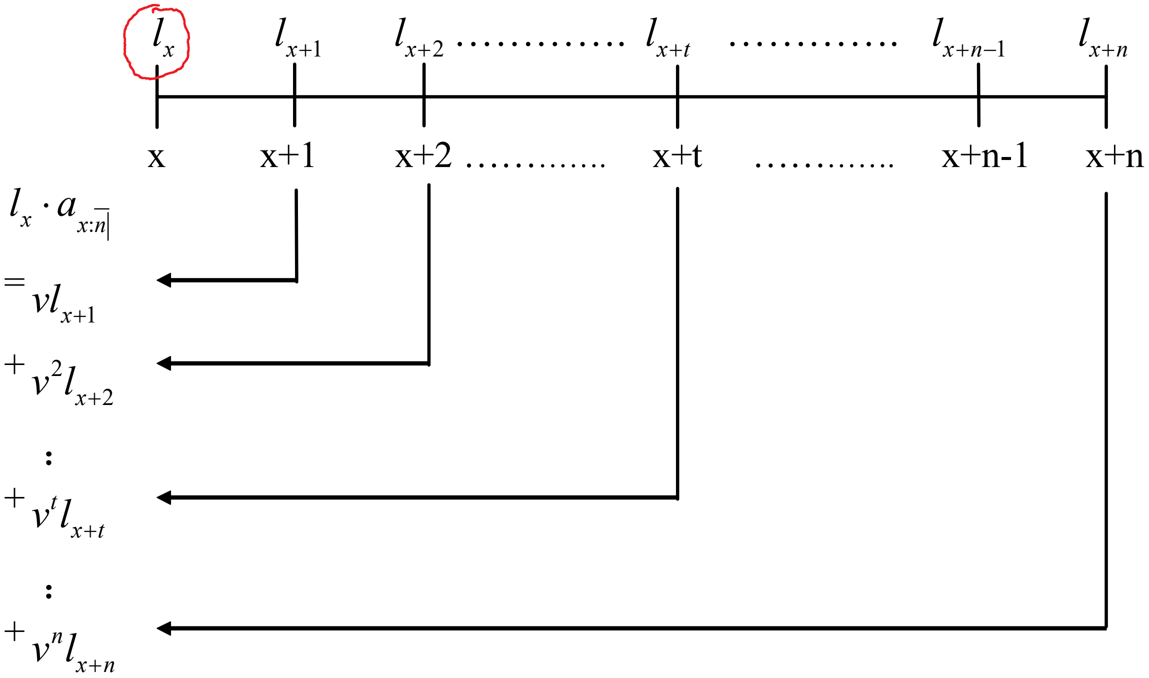


$$100\times A=10000\times[2\times(1+3\%)^{-1}+3\times(1+3\%)^{-2}]+10000\times95\times(1+3\%)^{-2}$$

A=9432元

年金：简单模型

*n*年期期末付年金的趸交净保费，用 $a_{x:\overline{n}|}$ 表示：



$$l_x \cdot a_{x:\overline{n}|} = v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots + v^n l_{x+n}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot l_{x+k} = \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_k p_x$$

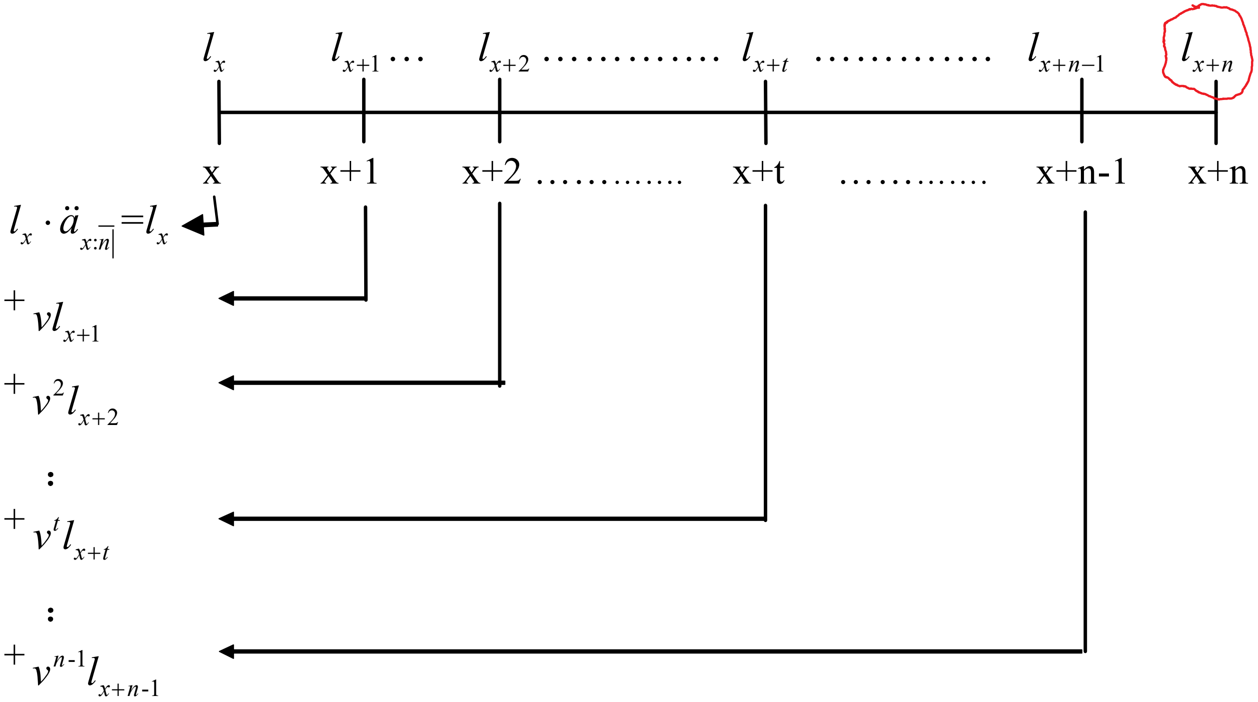
如果是终身年金

$$a_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot l_{x+k} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x$$

南開大學 Nankai University

年金：简单模型

n年期期初付年金的趸交净保费，用$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$表示：



$$l_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = l_x + v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots + v^{n-1} l_{x+n-1}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot l_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x$$

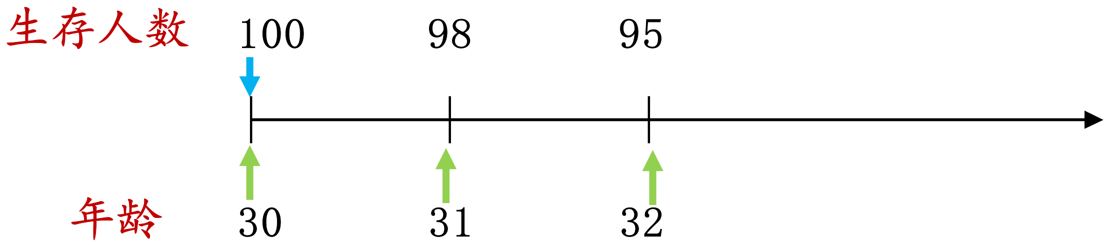
如果是终身年金

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot l_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x$$

Nankai University

年金:例题

- 练习：2年期年金保险，年龄为30岁。已知：30岁的生存人数为100，31岁的生存人数为98，32岁的生存人数为95。年金保险金额为10000元，利率为3%，计算趸交净保费。



期末付：$100\times a=10000\times[98\times(1+3\%)^{-1}+95\times(1+3\%)^{-2}]$，$a=18469$元

期初付：$100\times a=10000\times[100+98\times(1+3\%)^{-1}]$，$a=19515$元

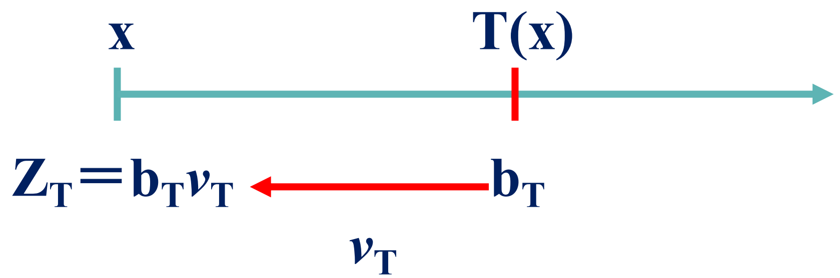
Nankai University

寿险的精算现值:连续模型

- 连续模型：死亡即付，假设死亡给付在死亡当时进行
- T(x)表示被保险人余命的随机变量，b_T表示被保险人在T时刻死亡获得的保险金额，v_T表示贴现因子。
- Z_T表示未来保险金支付现值的随机变量，则

$$Z_T = b_T v_T$$

- Z_T的数学期望$E(Z_T)$即称为未来保险金给付在签单时的精算现值，也就是趸交净保费。



定期寿险：*n*年期定期寿险

n 年定期保险死亡保险金 1 元，那么给付函数可表示为：

$$b_t = \begin{cases} 1 & t \le n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

$v_t = v^t$，$t \ge 0$ 为从签单到死亡的时间

签单时保险金给付现值随机变量

$$Z = b_T v_T = \begin{cases} v^T & T \le n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

Z 是 T 的函数，设 T 的概率密度用 $f_T(t)$ 表示，则

$$E(Z) = \int_0^n z_t f_T(t)dt = \int_0^n v^t f_T(t)dt == \int_0^n v^t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

用 $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}$ 表示这种保险的精算现值或趸交净保费，那么

$$\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t f_T(t)dt = \int_0^n v^t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

南開大學 Nankai University

n年期定期寿险

例题：设生存函数为 $s(x)=1-\frac{x}{100}$，$0\le x\le 100$，年利率 i=2.5%计算（保险金额为 1 元），求趸交净保费 $\bar{A}^{1}_{30:\overline{10|}}$。

解：因为 $s(x)=1-\frac{x}{100}$

$$f_T(t)=-\frac{s'(x+t)}{s(x)}=\frac{+1/100}{1-x/100}=\frac{1}{100-x}$$

$$\because x=30 \qquad \therefore f_T(t)=\frac{1}{70}$$

$$\bar{A}^{1}_{30:\overline{10|}}=\int_0^{10} v^t f_T(t)dt=\int_0^{10} e^{-\delta t} f_T(t)dt$$

$$=\frac{1}{70}\int_0^{10} (1.025)^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{70}\left[-\frac{1}{\ln 1.025}(1.025)^{-t}\Big|_0^{10}\right]$$

$=$ 0.126586

利息理论：

$$v^t=e^{-\delta t}$$

Nankai University

终身寿险

终身寿险的精算现值（趸交净保费）

设：(x) 投保终身寿险，保险金额为 1 元。

$$b_t = 1 \qquad t \geq 0$$

$$v_t = v^t \qquad t \geq 0$$

$$Z = b_T v_T = v^T \qquad T \geq 0$$

用 $\bar{A}_x$ 表示精算现值或趸交净保费，则

$$\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^{\infty} z_t \cdot f_T(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} v^t \, {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \, {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt$$

这个公式表示什么含义？：

$$\Pr(Z > E(Z))$$

Nankai University

方差

终身寿险 Z 的方差：

$$Var(Z)=E(Z^2)-(EZ)^2$$

$$E(Z^2)=\int_0^\infty z_t^2 f_T(t)dt=\int_0^\infty v^{2t}\,{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}dt=\int_0^\infty e^{-2\delta t}\,{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}dt$$

$E(Z^2)$相当于用 2δ 来代替δ计算的精算现值，用${}^2\bar{A}_x$表示$E(Z^2)$，即$\bar{A}_x$中的δ

用 2δ 替代，这就使$E(Z^2)$的计算简化了。则有

$$Var(Z)={}^2\bar{A}_x-(\bar{A}_x)^2$$

终身寿险

例题：设(x)要投保终身寿险，保险金额1元，签单时其未来寿命T的概率密度函数为：

$$f_T(t) = \begin{cases} 1/50 & 0 < t < 50 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

利息强度为$\delta(\neq 0)$，在签单时的保险金给付现值随机变量为Z，试计算

(1) $\bar{A}_x$

(2) 满足$P(Z \le \xi_{0.9}) = 0.9$的$\xi_{0.9}$

解：

(1) $\bar{A}_x = E(Z) = \int_0^{\infty} z_t f_T(t)dt$

$$= \int_0^{50} e^{-\delta t} \frac{1}{50} dt = \frac{1 - e^{-50\delta}}{50\delta} \qquad (\delta \neq 0)$$

(2) 满足 $P(Z \le \xi_{0.9}) = 0.9$的$\xi_{0.9}$

记 $h = \dfrac{\ln \xi_{0.9}}{\ln v}$，则

$$P(Z \le \xi_{0.9}) = P(v^T \le \xi_{0.9}) = P(T \ge \frac{\ln \xi_{0.9}}{\ln v}) = P(T \ge h)$$

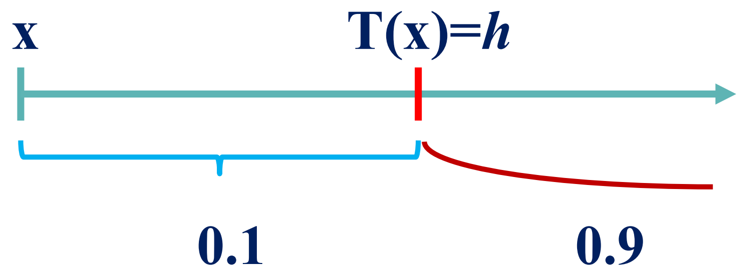
$$= \int_h^{\infty} f_T(t)dt = \int_h^{50} \frac{1}{50} dt = \frac{1}{50}(50 - h) = 0.9$$

h=5，即 $\ln \xi_{0.9} = 5 \ln v$

$\xi_{0.9} = v^5$　（这里，$v = e^{-\delta}$）

理解：

- 收取的趸交净保费的标准是在90%的概率下，未来赔付小于该数额。
- 转化成T(x)的函数。



例题：对保费的理解

例题：假设年龄为 x 岁的被保险人投保了保险金额 1 元的终身寿险，随机变量 $\boldsymbol{T}$ 的概率密度是 $f_T(t)=\mu e^{-\mu t}$， $\mu = 0.06$， $t \geq 0$。给定利息强度 $\delta = 0.04$。

（1） 求该保单的趸交净保费

（2） 计算该保单未来赔款大于趸交净保费的概率

（3） 满足 $P(Z \leq \xi_{0.95}) = 0.95$ 的 $\xi_{0.95}$

（4） 假设有 100 个相互独立的年龄为 x 岁的被保险人都投保了该保险，保险金额均为 1 元，试计算该保险基金在最初（即 t=0）时的数额至少为多少时，才能保证从这项基金中足以支付所有被保险人的死亡给付的概率达到 95%？

南開大學 Nankai University

例题：对保费的理解

由已知条件可知：$\bar{A}_x=\int_0^{+\infty} v^t\cdot {}_t p_x\cdot\mu_{x+t}dt=\int_0^{+\infty} v^t\cdot ue^{-ut}dt=\int_0^{+\infty} ue^{-(\delta+u)t}dt=\frac{\mu}{\mu+\delta}$

$$F(\mathrm{t})=\Pr(\mathrm{T}\le \mathrm{t})=\int_0^t f(s)ds=\int_0^t ue^{-us}ds=1\text{-}e^{-ut} \qquad s(t)=e^{-ut}$$

$$\bar{A}_x=\frac{\mu}{\mu+\delta}=\frac{0.06}{0.06+0.04}=0.6$$

$$\mathrm{Var(Z)}=\frac{\mu}{\mu+2\delta}\text{-}\left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2=\frac{0.06}{0.06+2\times0.04}\text{-}\left(\frac{0.06}{0.06+0.04}\right)^2=0.0686$$

（1） $\bar{A}_x=\frac{\mu}{\mu+\delta}=\frac{0.06}{0.06+0.04}=0.6$

（2） $\Pr(\mathrm{Z}>\mathrm{E(Z)})=Pr(v^T>\mathrm{E(Z)})=\Pr\left(\mathrm{T}<\frac{\ln E(Z)}{\ln v}\right)$

$$\mathrm{F}(h)=\int_0^h ue^{-ut}dt=1\text{-}e^{-uh}=1-\left(\frac{u}{u+\delta}\right)^{\frac{u}{\delta}}=1-0.6^{1.5}=0.535$$

令$h=\frac{\ln E(Z)}{\ln v}=\frac{\ln(\frac{u}{u+\delta})}{\ln(e^{-\delta})}=\frac{\ln(\frac{u}{u+\delta})}{-\delta}$

南開大學 Nankai University

例题：对保费的理解

（3） $$F(\mathrm{y})=Pr(\mathrm{Z}\le \mathrm{y})=Pr(v^{T}\le y)=Pr(T>\frac{\ln y}{\ln v})=0.95$$

$$s(\frac{\ln y}{\ln v})=e^{-u\frac{\ln y}{\ln v}}=e^{\frac{u}{\delta}\ln y}=y^{\frac{u}{\delta}}=0.95$$

$$\xi_{0.95}=y=0.95^{\frac{\delta}{u}}=0.95^{\frac{0.04}{0.06}}=0.966$$

（4） 解：令 Z_j 表示第 j 个被保险人的死亡给付在签单时的现值（j=1，2，…100），$Z_1,Z_2,\cdots Z_{100}$

相互独立。记 $Z=\sum_{j=1}^{100}Z_j$，则 Z 是表示这 100 个被保险人的死亡给付在签单或 t=0 时的现

值随机变量，则精算现值和方差分别为：

$$E(Z)=E(\sum_{j=1}^{100}Z_j)=\sum_{j=1}^{100}E(Z_j)=100\times 0.6=60$$

$$Var(Z)=Var(\sum_{j=1}^{100}Z_j)=\sum_{j=1}^{100}Var(Z_j)=100\times 0.0686=6.86$$

例题：对保费的理解

设 t=0）时基金数额用 y 表示，则 $p(Z \le y) = 0.95$ 等价于

$$P(\frac{Z-60}{\sqrt{6.86}} \le \frac{y-60}{\sqrt{6.86}}) = 0.95$$

根据中心极限定理，$\frac{Z-E(Z)}{\sqrt{Var(Z)}} = \frac{Z-60}{\sqrt{6.86}}$ 近似服从标准正态分布 N（0，1），

所以得 $\frac{y-60}{2.62} \ge 1.645$

$$y \ge 60 + 2.62 \times 1.645 = 64.31 \text{（元）}$$

- 相当于每人交纳0.6431元就可以达到95%不破产的概率。如果参保人数为1000或10000，结果会是多少？
- 1000人答案是：总金额为614元，每人0.614元
- 10000人答案是：总金额为6043元，每人0.6043元

- 大数法则的进一步理解：
- 标的数量越大，财务稳定性越好。

南開大學 Nankai University

生存保险的精算现值

n 年期生存保险是当被保险人生存至 n 年期满时，保险人在第 n 年末支付保险金的保险。

设 (x) 投保 n 年期生存保险，保险金额为 1 元，保险金在第 n 年末给付。

$$Z = b_T v_T = \begin{cases} 0 & T \le n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

生存保险的精算现值或趸交净保费用 $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ 表示。

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = E(Z) = \int_n^\infty v^n \cdot {}_t p_x u_{x+t} dt = v^n \cdot {}_n p_x$$

生存保险：连续模型=离散模型

Nankai University

两全保险的精算现值:连续模型

n 年期两全保险是 n 年定期保险和 n 年期生存保险的综合。假设年龄为 x 岁的人投保了保险金额为 1 元的 n 年期两全保险，精算现值（趸交净保费）用 $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ 表示，则可以直接表示为：

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}=\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1}$$

用 Z 表示保险金额为 1 元、死亡时即付的 n 年期两全保险在签单时的给付现值随机变量，对于两全保险有：

$$b_t=1,\quad t\geq 0 \qquad v_t=\begin{cases} v^t & t\leq n \\ v^n & t>n \end{cases}$$

$$Z=b_T v_T=\begin{cases} v^T & T\leq n \\ v^n & T>n \end{cases}$$

定期保险 Z_1 和生存保险 Z_2，则有 $Z=Z_1+Z_2$，得到

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}=\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1}$$

寿险精算现值：归纳

精算现值计算公式归纳如下：

1. n 年定期保险

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t f_T(t)dt = \int_0^n v^t \,{}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

2. 终身寿险

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \,{}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

3. n 年期生存保险

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = v^n \,{}_n p_x$$

4. n 年期两全保险

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \int_0^n v^t \,{}_t p_x \mu_{x+t} dt + v^n \,{}_n p_x$$

年金的精算现值:连续模型

➢生存年金是指在已知某人生存的条件下，按预先约定金额以连续方式或以一定的周期进行一系列的给付的保险，且每次年金给付必须以年金受领人生存为条件。一旦年金受领人死亡，给付便立即停止。

终身生存年金：设(x)购买了终身生存年金，即按连续方式每年给付年金额 1 元，此终身生存年金在 x 岁时的精算现值用 $\bar{a}_x$ 表示，它是剩余寿命 T 的函数。

终身生在年金的未来年金给付现值随机变量用 Y 表示，即 Y= $\bar{a}_{\overline{T|}}$,终身年金的精算现值为：

终身年金

$$\bar{a}_x = E(Y) = E(\bar{a}_{\overline{t|}}) = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}} f_T(t)dt$$

$$= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}} dF_T(t)$$

$$= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}} d(-{}_tp_x)$$

$$= -\int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}} d\,{}_tp_x$$

$$= -\bar{a}_{\overline{t|}} \cdot {}_tp_x\Big|_0^\infty + \int_0^\infty {}_tp_x d(\bar{a}_{\overline{t|}})$$

$$= 0 + \int_0^\infty {}_tp_x d(\bar{a}_{\overline{t|}})$$

$$\because \bar{a}_{\overline{t|}} = \int_0^t v^s ds$$

$$\therefore \bar{a}_x = \int_0^\infty {}_tp_x d\left[\int_0^t v^s ds\right]$$

$$= \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x dt$$

定期年金

n年定期生存年金。若将终身生存年金精算现值计算公式中的积分上限改为n，即得n年定期生存年金的精算现值的概念，这个精算现值用 $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ 表示，则

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \, dt$$

上式表示按连续方式每年给付年金额为1元的n年定期生存年金的趸交净保费。

延期年金

延期终身年金：以连续方式每年给付年金额1元的延期n年的终身生存年金，其在x岁时精算现值以${}_{n|}\bar{a}_x$ 表示，则

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\bar{a}_x &= \int_n^{\infty} v^t\,{}_t p_x\,dt \\
&= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n|}} \\
&= \int_0^{+\infty} v^{n+s}\,{}_{s+n}p_x\,ds = v^n \cdot {}_n p_x \cdot \int_0^{+\infty} v^s \cdot {}_s p_{x+n}\,ds \\
&= {}_nE_x \bullet \bar{a}_{x+n}
\end{aligned}
$$

- 一般的养老保险都是延期终身年金，n等于退休年龄减去购买年龄。

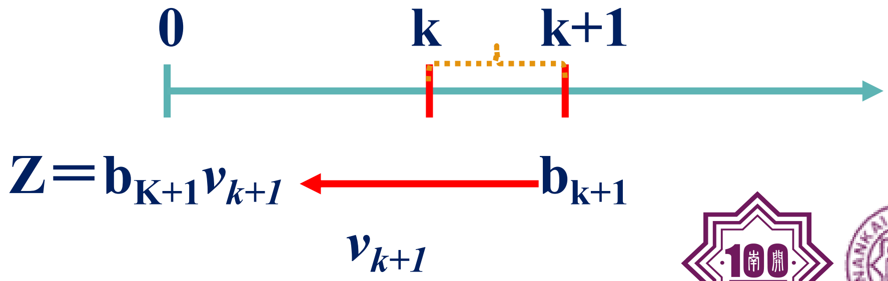
南開大學 Nankai University

寿险精算现值：离散模型

- 离散模型：假设死亡给付发生在死亡当年的年末
- $K=[T(x)]$表示被保险人取整余命的随机变量
- b_{K+1}表示被保险人在第K年死亡在年末K+1时获得的保险金额
- v_{K+1}表示贴现因子
- Z表示未来保险金给付在签单时现值的随机变量，则

$$Z=b_{K+1}v_{K+1}$$

- Z的数学期望E(Z)即称为未来保险金给付在签单时的精算现值，也就是趸交净保费。



n年期定期寿险

设(x)投保 n 年定期寿险，保险金额为 1 元，保险金在死亡年度末给付。

$$b_{k+1}=\begin{cases}1 & k=0,1\cdots\cdots,\ n-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则

$$Z=b_{K+1}v_{K+1}=\begin{cases}v^{K+1} & K=0,1,\cdots,n-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

精算现值用 $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ 表示，那么

$$A^{1}_{x:\overline{n}|}=\mathrm{E}(Z)=\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x=\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}{}_{k}p_x q_{x+k}$$

x岁的人在第k年（$x+k$岁那一年）死亡的概率，既

${}_{k|}q_x$

终身寿险和两全保险

终身寿险，保险金额 1 元，保险金在死亡年末给付。

$$Z = b_{K+1} v_{K+1} = v^{K+1} \qquad K = 0,1,\cdots,\infty$$

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

两全保险，设 (x) 投保 n 年期两全保险，保险金额为 1 元。

$$Z = b_{K+1} \cdot v_{K+1} = \begin{cases} v^{K+1} & K = 0,1,\cdots\cdots n-1 \\ v^n & K = n, n+1, \cdots\cdots \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + v^n {}_n p_x$$

$$= A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$

Nankai University

年金的精算现值：离散模型

期初付生存年金的精算现值

终身生存年金，Y 表示年金现值的随机变量，$\ddot{a}_x$ 表示该年金的精算现值。

$$Y=\ddot{a}_{\overline{k+1|}} \qquad k=0,1,\ldots$$

$$\ddot{a}_x=\sum_{k=0}^{\infty}\ddot{a}_{\overline{k+1|}}\cdot {}_{k|}q_x=\sum_{k=0}^{\infty} v^k\,{}_kp_x$$

定期生存年金，$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ 表示该年金的精算现值。

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}=\sum_{k=0}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{k+1|}}\cdot {}_{k|}q_x=\sum_{k=0}^{n-1} v^k\,{}_kp_x$$

延期终身生存年金，${}_{n|}\ddot{a}_x$ 表示该年金的精算现值。

$$\begin{aligned}{}_{n|}\ddot{a}_x&=\sum_{k=n}^{\infty} v^k\,{}_kp_x\\&=\ddot{a}_x-\ddot{a}_{x:\overline{n|}}={}_nE_x\cdot\ddot{a}_{x+n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x&=\sum_{k=0}^{\infty}\ddot{a}_{\overline{k+1|}}\cdot {}_{k|}q_x\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\ddot{a}_{\overline{k+1|}}\cdot({}_kp_x-{}_{k+1}p_x)\\
&=\ddot{a}_{\overline{1|}}\cdot({}_0p_x-{}_1p_x)+\ddot{a}_{\overline{2|}}\cdot({}_1p_x-{}_2p_x)+\ldots+\ddot{a}_{\overline{k+1|}}\cdot({}_kp_x-{}_{k+1}p_x)+\ldots\\
&=\ddot{a}_{\overline{1|}}\cdot{}_0p_x+(\ddot{a}_{\overline{2|}}-\ddot{a}_{\overline{1|}})\cdot{}_1p_x+(\ddot{a}_{\overline{3|}}-\ddot{a}_{\overline{2|}})\cdot{}_2p_x+\ldots+(\ddot{a}_{\overline{k+1|}}-\ddot{a}_{\overline{k|}})\cdot{}_kp_x+\ldots\\
&=1+v^1\cdot{}_1p_x+v^2\cdot{}_2p_x+\ldots+v^k\cdot{}_kp_x+\ldots\\
&=\sum_{k=0}^{\infty} v^k\,{}_kp_x\end{aligned}$$

Nankai University

年金的精算现值：离散模型

期末付生存年金的精算现值

终身年金，用 a_x 表示该年金的精算现值。

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x = \ddot{a}_x - 1$$

定期生存年金，用 $a_{x:\overline{n}|}$ 表示该年金的精算现值。

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k {}_k p_x$$

延期 n 年的终身生存年金， ${}_{n|}a_x$ 表示该年金的精算现值。

$${}_{n|}a_x = \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

$$= a_x - a_{x:\overline{n}|} = {}_nE_x \cdot a_{x+n}$$

Nankai University

两个重要关系

寿险的精算现值：连续模型与离散模型的关系

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t f_T(t)dt$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} v^t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 v^{k+s} \, {}_k p_x \cdot {}_s p_{x+k} \cdot \mu_{x+k+s} ds$$

$$= \sum_{k=0}^\infty v^{k+1} \, {}_k p_x \int_0^1 v^{s-1} q_{x+k} ds \qquad 0 \le s \le 1$$

- 实践中如何求解 $\bar{A}_x$
  - 利用 $\bar{A}_x = \dfrac{i}{\delta} A_x$
  - 假设死亡给付在每年的年中发生

得到 $\bar{A}_x = \sum_{k=0}^\infty v^{k+\frac{1}{2}} \cdot {}_{k|}q_x$

假设死亡于各年龄内是均匀分布

简称UDD假设，有 ${}_s p_{x+k} \mu_{x+k+s} = q_{x+k}$

$$\bar{A}_x = \sum_{k=0}^\infty v^{k+1} \, {}_k p_x q_{x+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s} ds$$

$$= \sum_{k=0}^\infty v^{k+1} \, {}_k p_x q_{x+k} \bar{s}_{\overline{1|}} = \frac{i}{\delta} A_x$$

$$\therefore \bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$$

不需要掌握推导过程

同理

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} = \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n|}}, \qquad \bar{A}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} = \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$$

南開大學 Nankai University

两个重要关系

寿险的精算现值与年金精算现值之间的关系

Y= $\bar{a}_{\overline{T|}}$ 表示终身年金给付现值的随机变量

Z= v^T 为终身寿险给付现值的随机变量

$$Y=\bar{a}_{\overline{T|}}=\frac{1-v^T}{\delta}=\frac{1-Z}{\delta}$$

$$E(Y)=E\left(\frac{1-Z}{\delta}\right)=\frac{1-E(Z)}{\delta}=\frac{1-\bar{A}_x}{\delta}$$

即： $\bar{a}_x=\dfrac{1-\bar{A}_x}{\delta}$

或 $\bar{A}_x=1-\delta\,\bar{a}_x$

同样可以证明： $\bar{A}_{x:\overline{n|}}=1-\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n|}}$

离散模型

$$Y=\ddot{a}_{\overline{k+1|}}=\frac{1-v^{K+1}}{d}=\frac{1-Z}{d}$$

$$\ddot{a}_x=E(Y)=E\left(\frac{1-v^{K+1}}{d}\right)=\frac{1-E(Z)}{d}$$

$$=\frac{1-A_x}{d}$$

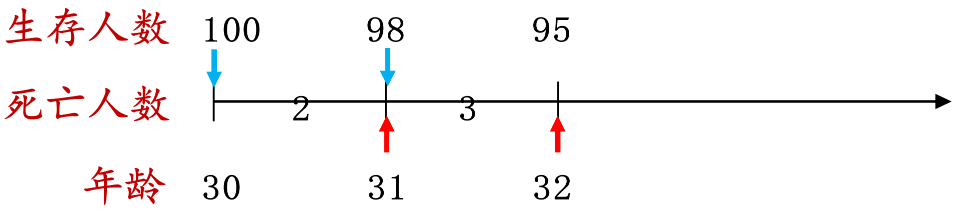
或 $1=d\cdot\ddot{a}_x+A_x$

Nankai University

均衡保费：分期净保费

- 设L为亏损现值的随机变量，则
- L=未来保险金给付现值-净保费收入的现值
- 均衡保费：$E(L)=0$

- 示例：2年期定期保险，年龄为30岁。已知：30岁的生存人数为100，31岁的生存人数为98，32岁的生存人数为95。保险金额为10000元，死亡保险金在死亡年末支付，利率为3%，计算均衡净保费P。



- 由已知可得：30岁的死亡人数2人，31岁的死亡人数3人。
- 由已知可得：交费在期初发生，第一年交费人数为100人，第二年交费人数为98人，则：

$$100\times P+98\times P\times(1+3\%)^{-1}=10000\times(2\times(1+3\%)^{-1}+3\times(1+3\%)^{-2})$$

$$P=244\text{元}$$

南开大学 Nankai University

终身寿险的均衡保费

全连续模型：死亡支付在死亡当时，连续交费

$$L=v^{T}-\bar{P}(\bar{A}_x)\cdot\bar{a}_{\overline{T|}},\quad E[L]=0,\quad \bar{A}_x-\bar{P}(\bar{A}_x)\cdot\bar{a}_x=0,\quad \bar{P}(\bar{A}_x)=\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$

全离散模型：死亡支付在死亡发生的年末，交费在每年年初

$$L=v^{K+1}-P_x\cdot\ddot{a}_{\overline{K+1|}},\quad E[L]=0,\quad A_x-P_x\cdot\ddot{a}_x=0,\quad P_x=\frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

半离散模型：死亡支付在死亡当时，交费在每年年初

$$L=v^{T}-P(\bar{A}_x)\cdot\ddot{a}_{\overline{K+1|}},\quad E[L]=0,\quad \bar{A}_x-P(\bar{A}_x)\cdot\ddot{a}_x=0,\quad P(\bar{A}_x)=\frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}$$

- 保险金支付过程与精算现值（趸交净保费）一致
- 交费过程是期初付年金
- 半连续模型符合实际情况

- 如果交费期不等于（<）保险期：交费期为**h**年的终身寿险的均衡保费（期交净保费）

$$_{h}P(\bar{A}_x)=\frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}}$$

南開大學 Nankai University

定期寿险的均衡保费

全连续模型：死亡支付在死亡当时，连续交费

$$\bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

全离散模型：死亡支付在死亡发生的年末，交费在每年年初

$$P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

半离散模型：死亡支付在死亡当时，交费在每年年初

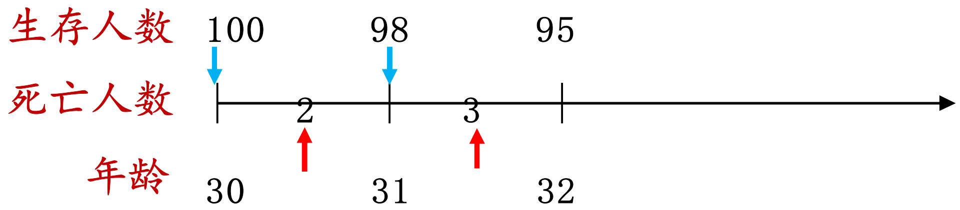
$$P(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

如果交费期为 ***h***（***h<n***）

则 ${}_{h}P(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \dfrac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$

例题

- 示例：2年期定期保险，年龄为30岁。已知：30岁的生存人数为100，31岁的生存人数为98，32岁的生存人数为95。保险金额为10000元，死亡保险金在死亡年中支付，利率为3%，计算均衡净保费P。



- 由已知可得：30岁的死亡人数2人，31岁的死亡人数3人。
- 由已知可得：交费在期初发生，第一年交费人数为100人，第二年交费人数为98人，则：

$$100\times P+98\times P\times(1+3\%)^{-1}=10000\times\left(2\times(1+3\%)^{-0.5}+3\times(1+3\%)^{-1.5}\right)$$

$$P=248\text{元}$$

两全寿险的均衡保费

全连续模型：死亡支付在死亡当时，连续交费

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

全离散模型：死亡支付在死亡发生的年末，交费在每年年初

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

半离散模型：死亡支付在死亡当时，交费在每年年初

$$P(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

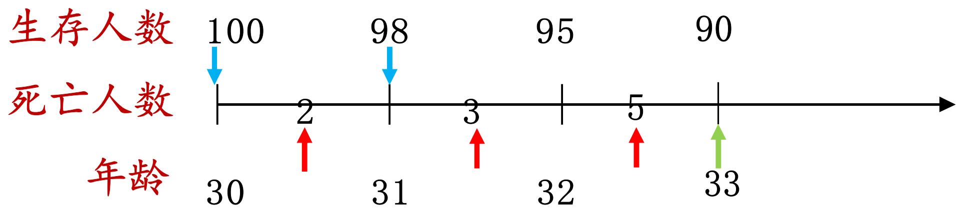
如果交费期为 ***h*** （***h***<***n***）

则 ${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$

南开大学 Nankai University

例题

- 示例：3年期两全保险，年龄为30岁。已知：30岁的生存人数为100，31岁的生存人数为98，32岁的生存人数为95，33岁的生存人数90。保险金额为10000元，死亡保险金在死亡年中支付，利率为3%，假设交费期为2年计算均衡净保费P。



- 由已知可得：30岁的死亡人数2人，31岁的死亡人数3人， 32岁的死亡人数5人，期满生存90人。
- 由已知可得：交费在期初发生，第一年交费人数为100人，第二年交费人数为98人，则：

$$100\times P+98\times P\times(1+3\%)^{-1}=10000\times[2\times(1+3\%)^{-0.5}+3\times(1+3\%)^{-1.5}+5\times(1+3\%)^{-2.5)}+90\times(1+3\%)^{-3}]$$

P=4707元

毛保费：费用类型

费用类型		成分
保险费用	新契约费	(1) 销售费用，包括代理人佣金及宣传广告费
		(2) 风险分类，包括体检费用
		(3) 准备新保单及记录
	维持费	(1) 保费收取及会计
		(2) 给付变更及理赔选择权准备
		(3) 与保单持有人进行联络
	营业费用	(1) 研究、开发新险种费用
		(2) 精算及一般法律服务
		(3) 普通会计
		(4) 税金、许可证等费用
	终止费用	(1) 理赔调查和辩护费
		(2) 各种给付的费用
投资费用		(1) 投资分析成本
		(2) 购买、销售及服务成本

费用形式：

- 固定费用：例如保单印制
- 保费的比例：与保费规模有关，例如佣金
- 保额的比例：与保险金额有关，例如理赔费用

费用在每年的额度不同，一般第一年较高，逐年递减至均衡。

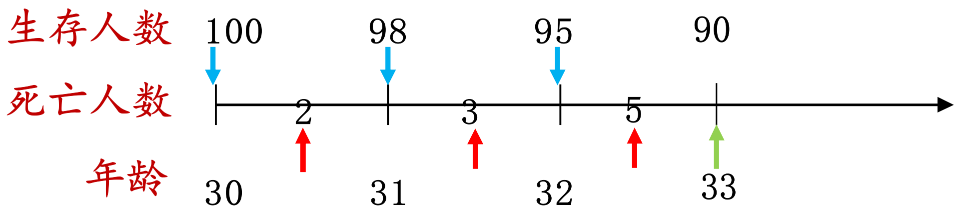
简化及通用形式：

- 保费的比例：每年的费用为毛保费的比例

毛保费

毛保费的精算现值 = 保险金支付的精算现值 + 费用支出的精算现值

➢ 示例：3年期两全保险，年龄为30岁。已知：30岁的生存人数为100，31岁的生存人数为98，32岁的生存人数为95，33岁的生存人数90。保险金额为10000元，死亡保险金在死亡年中支付，利率为3%。假设第一年、第二年、第三年的费用比例分别为毛保费的10%、5%和5%，求毛保费G。



毛保费：示例

- 由已知可得：30岁的死亡人数2人，31岁的死亡人数3人， 32岁的死亡人数5人，33生存人数90人。
- 由已知可得：交费在期初发生，第一年交费人数为100人，第二年交费人数为98人，第三年交费人数为95人。
  - 毛保费的现值：$100\times G+98\times G\times(1+3\%)^{-1}+95\times G\times(1+3\%)^{-2}$
  - 保险金给付的现值：$10000\times[2\times(1+3\%)^{-0.5}+3\times(1+3\%)^{-1.5}+5\times(1+3\%)^{-2.5})+90\times(1+3\%)^{-3}]$
  - 费用支出的现值： $100\times 0.1G+98\times 0.05G\times(1+3\%)^{-1}+95\times 0.05G\times(1+3\%)^{-2}$
- 计算公式为： $100\times G+98\times G\times(1+3\%)^{-1}+95\times G\times(1+3\%)^{-2}$

$$=10000\times[2\times(1+3\%)^{-0.5}+3\times(1+3\%)^{-1.5}+5\times(1+3\%)^{-2.5})+90\times(1+3\%)^{-3}]$$

$$+100\times 0.1G+98\times 0.05G\times(1+3\%)^{-1}+95\times 0.05G\times(1+3\%)^{-2}$$

整理得： $100\times 0.9G+98\times 0.95G\times(1+3\%)^{-1}+95\times 0.95G\times(1+3\%)^{-2}$

$$=10000\times[2\times(1+3\%)^{-0.5}+3\times(1+3\%)^{-1.5}+5\times(1+3\%)^{-2.5})+90\times(1+3\%)^{-3}]$$

所以： G=3460元

第二章：寿险产品定价与准备金评估

1 生命表基础

2 寿险产品的精算定价

3 寿险产品定价实务

4 寿险准备金的概念与计算

5 寿险准备金评估实务

寿险产品开发概述

- 险种开发必须综合和体现众多的相关因素：
  - 险种开发是实现公司目标的重要步骤；
  - 必须能体现出公司的特点、公司企业文化以及公司长期的战略规划；
  - 满足营销人员、公司股东和社会大众的需要；
  - 了解公司内外的制约因素，并对这些因素采取相应的对策，或者消除，或者进行管理、控制；
  - 反映出社会、经济、法律、竞争环境的变化。
- 寿险公司的目标：
  - 战略目标
  - 市场定位：对市场需求深入了解？
- 问题：不同公司的发展战略？是否需要差异化？特别是在向大公司转变的过程中。

- 产品结构
  - 业务目标：适应市场发展、需要维持股票价格持续增长。
  - 财务目标：公司保费规模增长目标和利润增长目标。
  - 合适的产品结构不仅可以达成这些目标，而且可以避免在发展过程中的剧烈波动，从而实现良性的、可持续性的发展。
  - 公司不可能在一个产品上既实现规模目标又实现利润目标/内含价值目标，不同的目标需要有不同的产品来分别实现。

如何检验产品和价格

- 利润贡献率
- 价值贡献率
- 市场份额贡献率
- 风险贡献率
- 费用贡献率
- 品牌贡献率

- **不同产品所起的作用不同**
  - 不同的目标由不同的产品来实现
  - 亏损产品是否可以销售?
  - 产品利润与公司利润?
- **合理的产品结构**
- **后期管理的重要性**
- **把短期目标做成了长期行为**
- **如何做到双赢**
  - 价值低≠对客户有利

不同角度的产品定价

- 精算角度的定价
  - 成本定价
    - 定价基础的选择及直接影响因素
    - 净保费加成法
    - 毛保费法
    - 单重模型 ⟶ 双重模型
    - 资产份额定价法：利润检测
  - 市场定价
  - 再保寻价
- 管理学角度的定价
- 经济学角度定价：宏观定价法

产品定价原则

定价原则

- 充足性原则：保险公司获得充足的保费
- 合理性原则：客户获得合理的保费
- 公平性原则：体现客户的差异性
- 可行性原则：市场竞争和客户可接受程度
- 稳定性原则：不能经常调整
- 弹性原则：必要的调整

定价是否可以实现有保证的充足性、公平性、合理性等原则，需要通过产品形态的设计和定价的有机结合。

价格就是最后平衡的结果：平衡各方的利益。问题是如何平衡？各方利益如何体现：多目标的理念和决策机制。

南開大學
Nankai University

寿险定价假设

- 定价假设
  - 影响保费计算的因素：
    - 死亡率
    - 利率
    - 费用率
  - 影响现金流的因素：
    - 选择权（退保率、贷款发生率）
    - 交费频率
    - 现金价值
    - 红利分配
    - ……

计算毛保费
- 价格初始值

定价过程
- 利润检测

实务中的死亡率假设

- 死亡率假设因险种不同而不同，如死亡类保险和生存类保险，终身寿险和定期寿险。
- 对于同一类险种，死亡率假设也会有所不同，如吸烟者与不吸烟者。
  - 如果利用标准生命表进行调整作为死亡率假设，每个年龄和保单年度的调整系数可能不同。
- 死亡率改进在定价假设中非常重要
- 死亡率假设对于定期寿险的影响较为敏感

死亡率假设范例

- A公司：
  - 利用标准生命表，但要考虑被保险人的各种情况，如通过体检和不经过体检、吸烟者和不吸烟者、投保时年龄、保障期限等。例如：对经过体检的不吸烟者死亡率调整因子首年约为55%（即55%生命表首年死亡率），然后逐年递增到60%或70%。
- B公司：
  - 对终身保险正常业务，利用公司经验数据，而对未来死亡率进行改进。
  - 对保费递增的定期险，利用94%公司的经验死亡率作为死亡率假设，而同时对未来的死亡率进行改进。
- C公司：
  - 对非吸烟者：80%公司经验死亡率。
  - 对吸烟者：180%公司经验死亡率。
- D公司：
  - 对保额小于100,000元的终身保险，利用国民生命表的数据，经下列调整而得：
    - 对不吸烟者：65%×国民生命表死亡率。
    - 对吸烟者：130%×国民生命表死亡率。
  - 对于超过100,000元的保单，上面的调整因子减少5%。而对于定期保险上面的调整因子增加10%。

不同死亡率的保费比较表

年龄	死亡率变化				
	-10%	-5%	0%	+5%	+10%
30	362.9206	368.0156	372.9029	377.6005	382.1243
31	371.546	376.7486	381.7385	386.5342	391.1521
32	380.3872	385.7004	390.796	395.693	400.408
33	389.445	394.8721	400.0765	405.0776	409.8925
34	398.7221	404.2662	409.5824	414.6906	419.6084
35	408.2201	413.8842	419.3152	424.5335	429.5569
36	417.9367	423.7237	429.2723	434.6033	439.7351
37	427.8782	433.7912	439.4603	444.907	450.15
38	438.0459	444.0879	449.8805	455.4458	460.8028
39	448.4421	454.6161	460.5353	466.2221	471.6961
40	459.0703	465.3796	471.4284	477.2398	482.8337

- 每千元终身寿险保额的趸交净保费（利率2.5%）

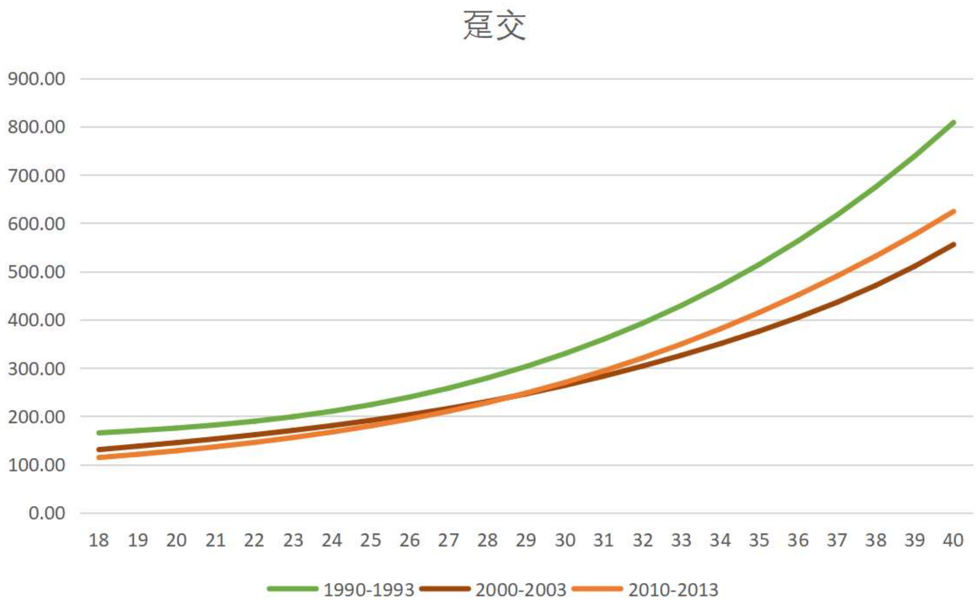
不同死亡率的保费比较表

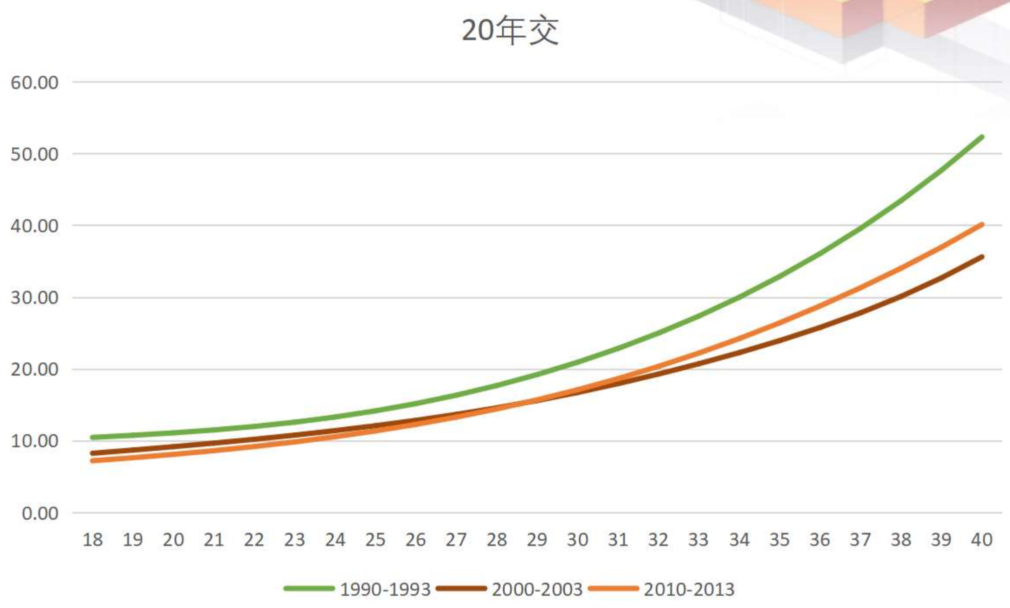
➢ 20年期定期死亡保险、保额10000的净保费（利率2.5%）

年龄	趸交			10年交			20年交		
	1990-1993	2000-2003	2010-2013	1990-1993	2000-2003	2010-2013	1990-1993	2000-2003	2010-2013
18	165.42	130.78	114.36	18.52	14.62	12.78	10.44	8.24	7.20
19	170.13	137.87	121.02	19.05	15.41	13.52	10.74	8.69	7.62
20	175.47	145.25	128.36	19.64	16.24	14.34	11.08	9.15	8.08
21	181.81	153.08	136.53	20.35	17.12	15.26	11.48	9.65	8.60
22	189.52	161.49	145.62	21.21	18.06	16.28	11.97	10.18	9.17
23	198.91	170.60	155.80	22.26	19.08	17.41	12.56	10.76	9.82
24	210.26	180.50	167.18	23.53	20.19	18.69	13.28	11.39	10.54
25	223.80	191.29	179.94	25.05	21.40	20.12	14.14	12.08	11.35
26	239.68	203.07	194.24	26.83	22.72	21.72	15.16	12.82	12.26
27	258.08	216.02	210.24	28.89	24.17	23.52	16.33	13.65	13.28
28	279.13	230.39	228.10	31.25	25.78	25.52	17.67	14.57	14.41
29	302.97	246.31	247.97	33.93	27.57	27.75	19.20	15.58	15.68
30	329.75	263.88	269.96	36.94	29.55	30.22	20.92	16.71	17.08
31	359.63	283.09	294.17	40.30	31.71	32.94	22.84	17.94	18.63
32	392.81	303.88	320.70	44.03	34.05	35.92	24.98	19.27	20.34
33	429.49	326.23	349.63	48.17	36.56	39.17	27.35	20.71	22.20
34	469.93	350.27	381.00	52.73	39.27	42.70	29.98	22.26	24.22
35	514.39	376.23	414.86	57.76	42.20	46.52	32.87	23.94	26.41
36	563.17	404.55	451.22	63.28	45.40	50.62	36.06	25.77	28.77
37	616.58	435.88	490.11	69.33	48.94	55.02	39.57	27.80	31.30
38	675.00	470.96	531.68	75.96	52.91	59.72	43.43	30.08	34.02
39	738.79	510.60	576.20	83.22	57.39	64.77	47.66	32.67	36.94
40	808.36	555.51	624.08	91.15	62.48	70.21	52.30	35.60	40.10

不同死亡率的保费比较表

➢ 20年期定期死亡保险、保额10000的净保费（利率2.5%）

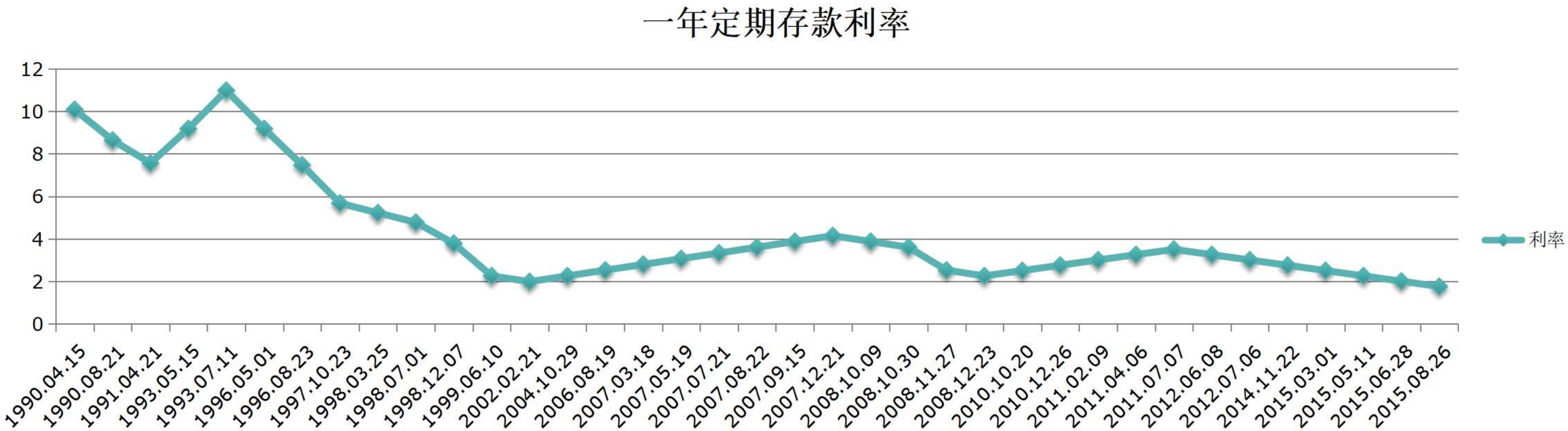




南開大學
Nankai University

实务中的利率假设

- 利率假设的基础是公司的投资收益水平
- 不同产品的利率假设可以不同，如分红寿险和不分红寿险，长期寿险和短期寿险，传统寿险和新型寿险。
- 利率假设在整个保险期间可以不同
- 利率假设对寿险产品价格的影响较大，特别是长期寿险。



不同利率的费率比较表

利率 年龄	2.5%	4%	6%	8%
30	373	220	118	70
31	382	228	124	75
32	391	236	131	79
33	400	245	138	85
34	409	254	145	90
35	419	263	152	96
36	429	273	160	102
37	439	283	169	109
38	450	294	177	116
39	461	304	187	123
40	471	315	196	131

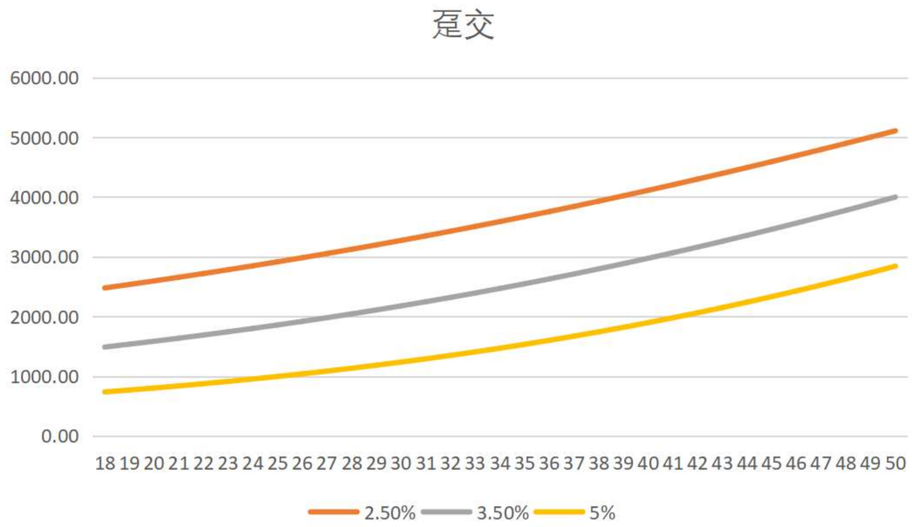
保额为1000元的终身死亡保险的趸交净保费

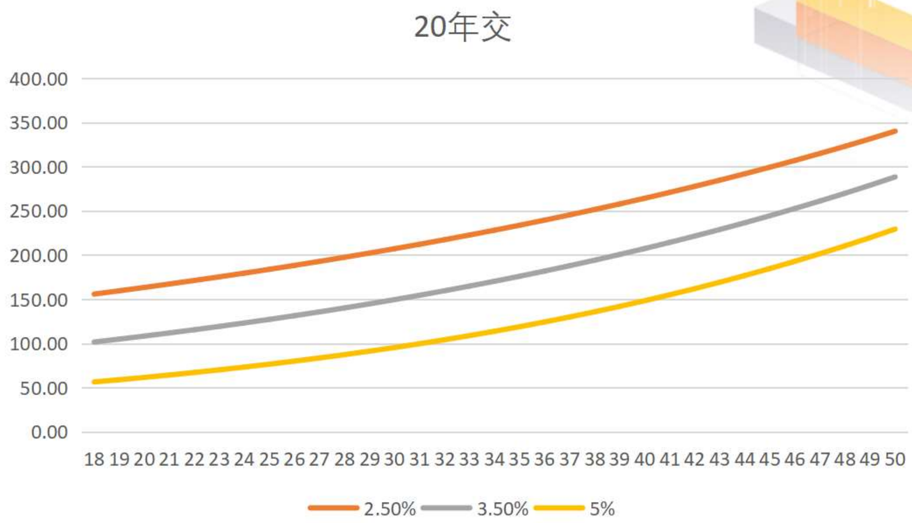
南开大学
Nankai University

终身寿险、保额10000的净保费(2010-2013)

年龄	趸交			10年交			20年交		
	2.50%	3.50%	5%	2.50%	3.50%	5%	2.50%	3.50%	5%
25	2915.08	1857.70	995.15	325.94	216.46	123.09	183.86	127.23	76.58
26	2983.56	1917.64	1039.24	333.65	223.48	128.57	188.28	131.40	80.01
27	3053.60	1979.48	1085.31	341.55	230.73	134.29	192.81	135.72	83.60
28	3125.21	2043.28	1133.42	349.63	238.22	140.27	197.47	140.18	87.36
29	3198.42	2109.06	1183.65	357.91	245.94	146.52	202.24	144.80	91.29
30	3273.23	2176.87	1236.06	366.38	253.92	153.05	207.15	149.57	95.40
31	3349.67	2246.74	1290.73	375.04	262.14	159.86	212.18	154.51	99.70
32	3427.74	2318.72	1347.72	383.91	270.63	166.97	217.36	159.62	104.20
33	3507.45	2392.85	1407.13	392.98	279.38	174.39	222.67	164.90	108.91
34	3588.83	2469.16	1469.01	402.26	288.40	182.13	228.13	170.37	113.82
35	3671.87	2547.69	1533.44	411.75	297.71	190.20	233.74	176.03	118.97
36	3756.59	2628.48	1600.50	421.47	307.30	198.62	239.50	181.88	124.34
37	3842.99	2711.55	1670.27	431.41	317.19	207.39	245.43	187.93	129.96
38	3931.08	2796.94	1742.81	441.58	327.39	216.53	251.53	194.20	135.83
39	4020.84	2884.66	1818.20	452.00	337.90	226.05	257.81	200.68	141.96
40	4112.26	2974.72	1896.45	462.65	348.72	235.96	264.26	207.39	148.37
41	4205.29	3067.10	1977.62	473.55	359.88	246.27	270.89	214.33	155.05
42	4299.91	3161.80	2061.74	484.70	371.36	256.99	277.71	221.50	162.02
43	4396.08	3258.79	2148.81	496.09	383.17	268.13	284.72	228.91	169.29
44	4493.75	3358.03	2238.85	507.74	395.31	279.69	291.93	236.56	176.86
45	4592.86	3459.50	2331.85	519.62	407.78	291.68	299.36	244.48	184.75
46	4693.35	3563.14	2427.81	531.75	420.59	304.09	307.00	252.66	192.96
47	4795.16	3668.90	2526.71	544.10	433.71	316.93	314.87	261.12	201.51
48	4898.24	3776.76	2628.57	556.68	447.16	330.21	322.99	269.87	210.41
49	5002.58	3886.70	2733.41	569.49	460.93	343.92	331.38	278.94	219.69
50	5108.16	3998.75	2841.32	582.52	475.02	358.09	340.07	288.35	229.37

不同利率的费率比较表





终身寿险、保额10000的净保费(2010-2013)

南開大學 Nankai University

实务中的费用假设

- 费用假设可以非常复杂
- 费用假设在不同的保险年度不同，一般前期假设较高。
- 费用假设对于不同年龄的被保险人也可能有所不同
- 费用假设中应考虑通货膨胀的影响
- 费用假设对于产品定价和公司利润会产生很大影响

分类			第一年			续年				
			每份保单	每千元保额	保费百分比	每份保单	每千元保额	保费百分比（按保单年度）		
								2-9年	10-15年	16年以后
新契约费	销售费用	佣金			50%			5%	5%	3%
		销售费用			25%			2.5%	1.5%	1%
		其他	12.5	4						
	风险分类		18	0.5						
	发行与记录		4							
维持费			2	0.25		2	0.25			
营业费用	研究、精算、会计		4	0.25		4	0.25			
	税金				3%			2%	2%	2%
以上小计			40.5	5	78%	6	0.5	9.5%	8.5%	6%
给付费用			每份保单18元加上每千元保额0.1元							

费用假设范例

- A公司：
  - 每张保单首年费用：170元外加12%的未予承保的保户额外费用。
  - 每张保单以后各年费用：第二年30元，以后按4%的通货膨胀率递增。
  - 保费的一定比例：各年都是4%外加保费收入税率。
  - 佣金的一定比例：首年佣金的17%。
- B公司：
  - 费用假设基于公司的预算，同时在维持费及保单终止费用中考虑通货膨胀因素。
  - 每张保单费用：首年费用275元，第二年65元，以后各年每增长5%，以体现通货膨胀因素的影响。
  - 每千元保额费用：首年0.14元，以后各年0.05元。
  - 保费的比例：首年保费的20%，以后各年为2.2%。
  - 每次赔案费用：185元，再按年通货膨胀率5%递增。
  - 每次退保费用：22元，再按年通货膨胀率5%递增。

毛保费与净保费的比较

年龄	趸交		n=10		n=20	
	净保费	毛保费	净保费	毛保费	净保费	毛保费
25	995.1486	1105.721	123.0943	147.5413	76.58083	90.42987
26	1039.243	1154.715	128.5692	154.1059	80.01169	94.48487
27	1085.305	1205.895	134.2918	160.9679	83.60193	98.72886
28	1133.419	1259.354	140.2734	168.1409	87.35957	103.1715
29	1183.646	1315.162	146.5224	175.635	91.29094	107.8203
30	1236.061	1373.401	153.049	183.4626	95.40373	112.6847
31	1290.726	1434.14	159.8619	191.6343	99.70475	117.7728
32	1347.725	1497.472	166.9729	200.1644	104.203	123.0956
33	1407.128	1563.476	174.3925	209.0657	108.9068	128.6631
34	1469.005	1632.228	182.1311	218.3507	113.8243	134.4854
35	1533.437	1703.819	190.2011	228.0348	118.9653	140.5743
36	1600.503	1778.337	198.6155	238.1337	124.3399	146.9422
37	1670.27	1855.856	207.386	248.662	129.9573	153.6003
38	1742.813	1936.459	216.5258	259.6358	135.8278	160.5613
39	1818.196	2020.218	226.0473	271.0708	141.9613	167.8373
40	1896.455	2107.172	235.9597	282.9782	148.3655	175.4381
41	1977.625	2197.361	246.2722	295.3697	155.0488	183.3741
42	2061.74	2290.822	256.9942	308.2572	162.0204	191.6568
43	2148.809	2387.565	268.1316	321.6482	169.288	200.2961
44	2238.848	2487.609	279.6913	335.5518	176.8613	209.3046
45	2331.849	2590.944	291.6766	349.9721	184.7493	218.6935
46	2427.807	2697.563	304.0901	364.9127	192.9622	228.4764
47	2526.708	2807.454	316.9325	380.3747	201.5117	238.6686
48	2628.566	2920.629	330.2076	396.3631	210.4145	249.2916
49	2733.411	3037.124	343.9218	412.8857	219.6922	260.3732
50	2841.318	3157.02	358.0891	429.9599	229.3747	271.9518

费用假设

年份	趸交	10年交	20年交
1	0.1	0.5	0.6
2		0.3	0.4
3		0.15	0.2
4		0.08	0.1
5		0.08	0.08
6		0.08	0.08
7		0.08	0.08
8		0.08	0.08
9		0.08	0.08
10		0.08	0.08
11			0.08
12			0.08
13			0.08
14			0.08
15			0.08
16			0.08
17			0.08
18			0.08
19			0.08
20			0.08

寿险产品定价:利润检测

- 假设:年龄35岁,男性,分红终身寿险,保额为1,000元,毛保费为15.5元(三元素法计算而得)。
- 制作利润测试表(现金流量表)
  - 因子选择:
    - 涉及影响现金流的所有因子
    - 与计算毛保费的假设不同,剔除了安全边际,是对更接近实际结果的预期。
  - 将保费带入利润测试表,利用现金流量表得出一定期限(一般为20年)的利润分布,计算相应利润测量值。
  - 循环上述过程,直到利润测量值达到公司的要求。

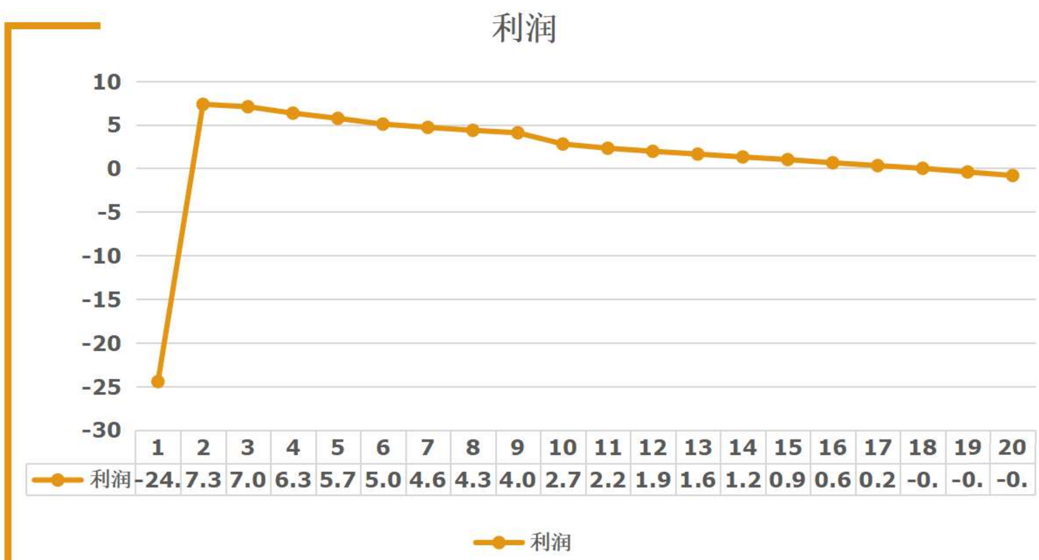
年度	期初生存人数	死亡人数	退保人数	期末生存人数	每1000费用	现金价值
1	100000	88	20000	79912	27	0
2	79912	81	8630	71201	3	0
3	71201	85	5696	65420	3	0
4	65420	91	4056	61273	3	6.7
5	61273	94	2941	58238	3	14.04
6	58238	105	2096	56037	3	21.72
7	56037	113	1793	54131	3	29.73
8	54131	121	1569	52441	3	38.12
9	52441	130	1415	50896	3	46.87
10	50896	139	1272	49485	3	56.02
11	49485	157	1187	48141	3	65.55
12	48141	168	1107	46866	3	75.5
13	46866	179	1031	45656	3	85.88
14	45656	191	958	44507	3	96.71
15	44507	203	890	43414	3	108.01
16	43414	217	868	42329	3	119.79
17	42329	233	846	41250	3	132.02
18	41250	250	825	40175	3	144.69
19	40175	270	803	39102	3	157.79
20	39102	292	782	38028	3	171.28

红色数字是给出的假设，黑色数字是计算而得。

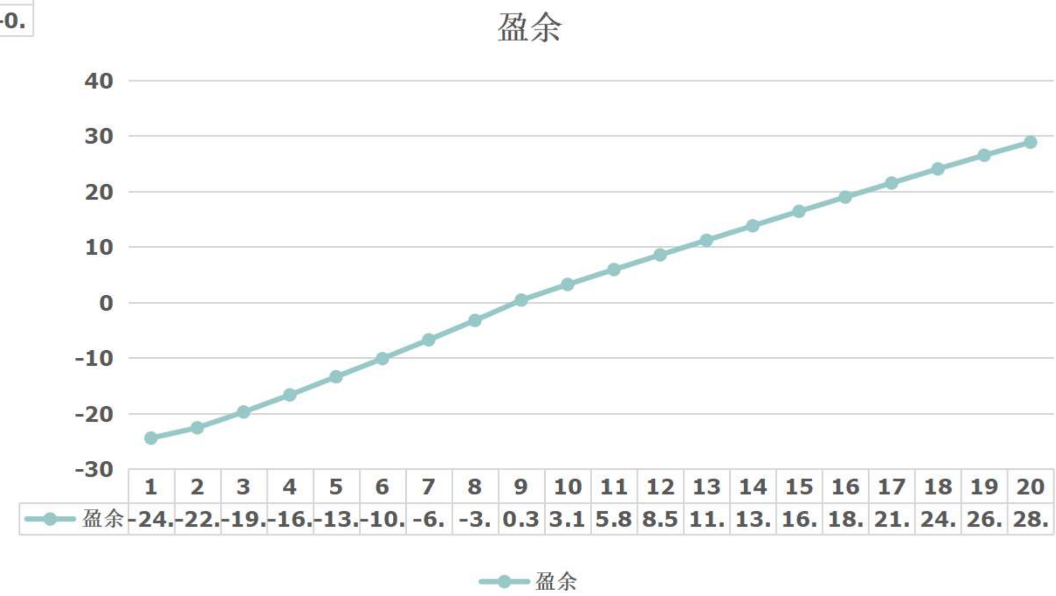
红利	期初基金数额	保费收入	费用支出	死亡支付	退保支付	红利支付总额
0	0	1550000	2700000	88000	0	0
0.5	-1345460	1238636	239736	81000	0	35600.5
1	-497995.9	1103616	213603	85000	0	65420
1.5	273053.094	1014010	196260	91000	27175.2	91909.5
2	974795.6725	949731.5	183819	94000	41291.64	116476
2.5	1641374.268	902689	174714	105000	45525.12	140092.5
3.1	2287248.082	868573.5	168111	113000	53305.89	167806.1
3.7	2917407.544	839030.5	162393	121000	59810.28	194031.7
4.3	3537222.118	812835.5	157323	130000	66321.05	218852.8
5.9	4149056.884	788888	152688	139000	71257.44	291961.5
6.6	4707456.064	767017.5	148455	157000	77807.85	317730.6
7.3	5245756.784	746185.5	144423	168000	83578.5	342121.8
8	5772535.72	726423	140598	179000	88542.28	365248
8.7	6289767.905	707668	136968	191000	92648.18	387210.9
9.4	6798455.936	689858.5	133521	203000	96128.9	408091.6
10.2	7300369.346	672917	130242	217000	103977.7	431755.8
11	7786419.817	656099.5	126987	233000	111688.9	453750
11.8	8255006.305	639375	123750	250000	119369.3	474065
12.7	8705303.873	622712.5	120525	270000	126705.4	496595.4
13.6	9130714.826	606081	117306	292000	133941	517180.8

利息收入	期末基金数额	期末资产份额	期末准备金	期末盈余	本期损益	营运损益
-107460	-1345460	-16.83677045	7.63	-24.4668	-24.4668	-24.4668
-34835.4	-497995.9	-6.994226205	15.61	-22.6042	4.855902	7.327313
31456.49	273053.094	4.173847356	23.94	-19.7662	4.835552	7.049705
94077.28	974795.6725	15.90905737	32.6	-16.6909	4.412997	6.312352
152433.7	1641374.268	28.18390515	41.61	-13.4261	4.134675	5.715145
208516.4	2287248.082	40.81674754	50.97	-10.1533	3.800187	5.055997
263809	2917407.544	53.89531959	60.67	-6.77468	3.736077	4.682045
318019.1	3537222.118	67.451462	70.73	-3.27854	3.714468	4.343838
371496.1	4149056.884	81.52029401	81.14	0.380294	3.758355	4.062381
424418.1	4707456.064	95.12894945	91.93	3.198949	2.807812	2.772609
472276.7	5245756.784	108.9665106	103.09	5.876511	2.588253	2.29231
518716.7	5772535.72	123.1710775	114.65	8.521078	2.484695	1.941421
564197.5	6289767.905	137.7643224	126.61	11.15432	2.407415	1.620193
608847.1	6798455.936	152.7502626	138.99	13.76026	2.317978	1.288173
652796.4	7300369.346	168.157031	151.79	16.36703	2.260337	0.990735
696109	7786419.817	183.9500063	165.03	18.92001	2.133447	0.622656
737912.9	8255006.305	200.121365	178.66	21.46136	2.046457	0.299115
778106.8	8705303.873	216.6846017	192.68	24.0046	1.968975	-0.01423
816524.2	9130714.826	233.5101741	207.06	26.45017	1.786861	-0.4328[illegible]
852614.1	9528982.151	250.5780517	221.77	28.80805	1.609929	-0.83[illegible]

最后一列就是每年的利润值。



利润表示当期业务的收益，第一年为负，表示亏损，也表示公司需要资本垫付。（最后一列）



盈余表示利润的累计值，虽然从第二年开始利润为正，但累计值一直为负，直到第9年变为正值，既从第9年开始赚钱。（倒数第三列）

利润目标

- ①利润现值：各年度末利润值的精算现值；
- ②获利比例：利润现值与保费现值的比例；
- ③利润现值与风险成本的比例，风险成本等于预期死亡成本的一个比例加上有效保费准备金的一个比例。对于很大范围的产品可选择适当的比例以产生合理的利润目标；
- ④投资回报率：利用各年度的利润计算而得的收益率；
- ⑤n年后的资产份额与现金价值或准备金的一个比例。
- ⑥n年内的利润现值为正值，换句话说，产品必须在n年内实现正利润，一般为5年～10年，如果积累和贴现用的是相同利率的话，这等价于年末的资产份额超过准备金，这里称为临界平衡年；
- ⑦利润现值与死亡保险金给付现值；
- ⑧上述利润目标的组合

对股东而言，他的现金流就是上表中的最后一列，计算该现金流的收益率。

南開大學 Nankai University

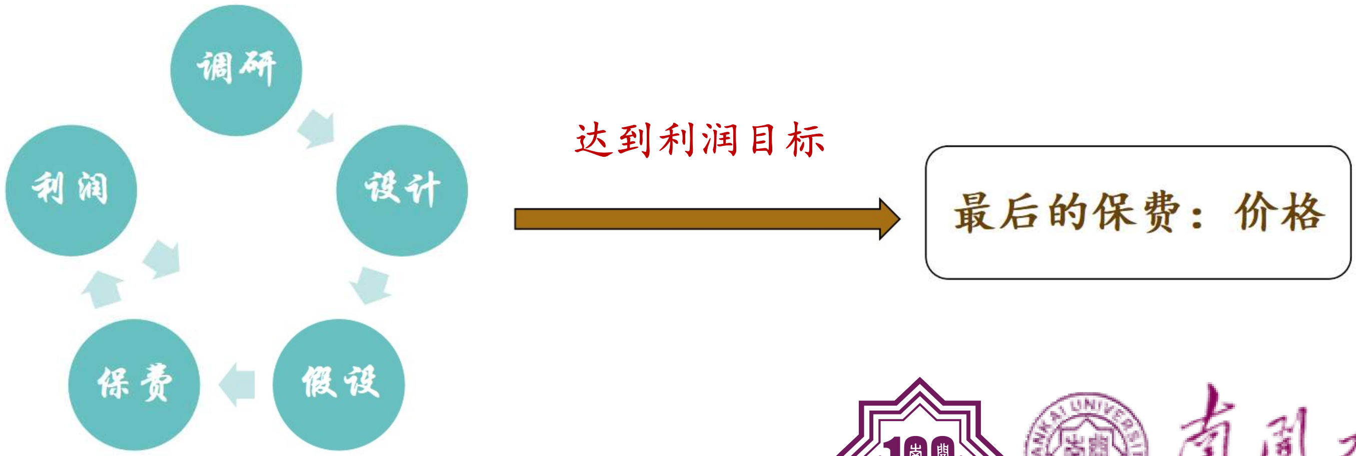
数值结果:利润测量值

- 利润测量值

利润现值	获利比率	投资回报率	临界平衡年	资产份额/准备金
1.58	0.0172	0.119	9	1.13

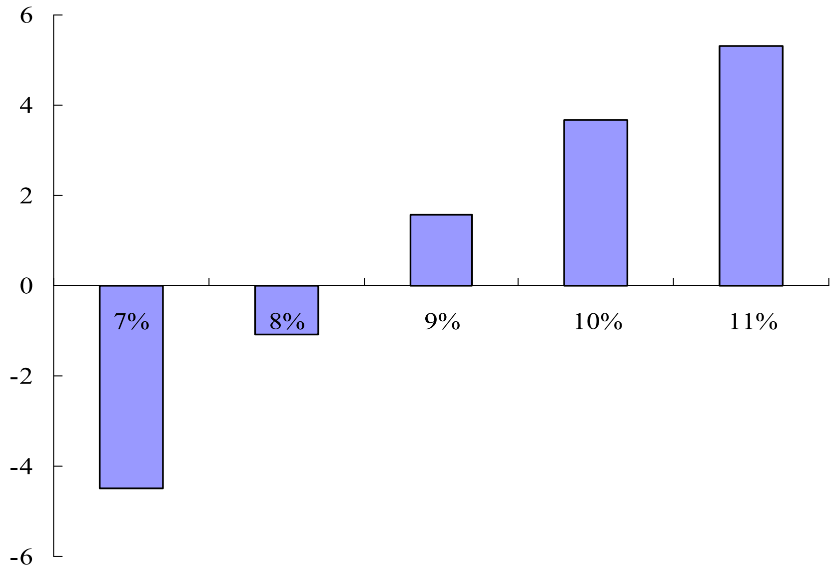
保费的调整

- 利润指标① 利润现值与保费现值的比为10%
- 利润指标② 利润现值与风险成本现值的比
- 利润指标③ 利润现值与死亡保险金给付现值的比
- 利润指标④ 15%的投资回报率，即ROI=15%
- 利润指标⑤ n年期末现金价值为期末准备金的110%



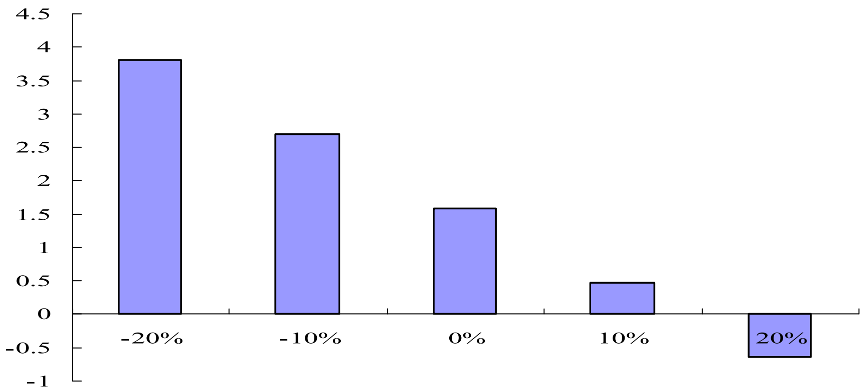
不同利率的利润现值表

利率	0. 03	0. 04	0. 05	0. 06	0. 07	0. 08	0. 09	0. 1	0. 11
利润现值	−14. 96	−12. 42	−9. 89	−7. 36	−4. 48	−1. 09	1. 58	3. 68	5. 32



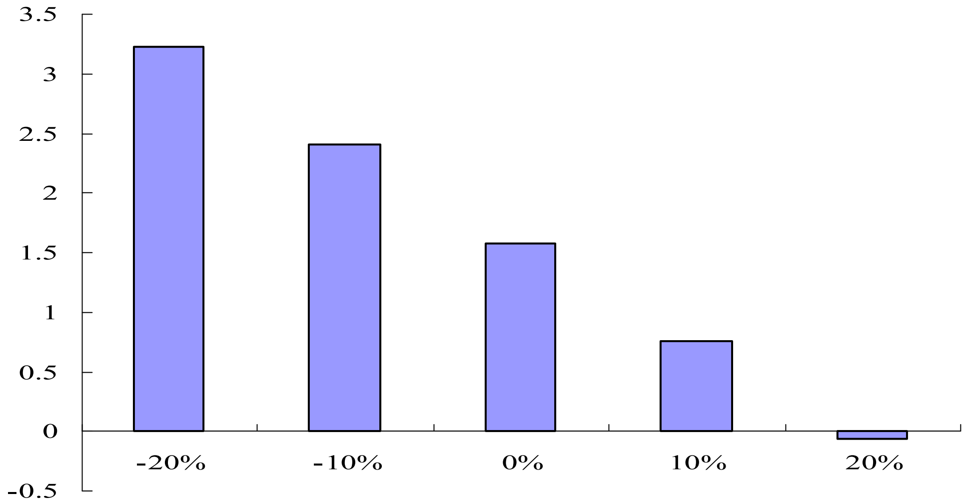
不同死亡率的利润现值表

死亡率变化	-20%	-10%	0%	+10%	+20%
利润现值	3.81	2.7	1.58	0.47	-0.64



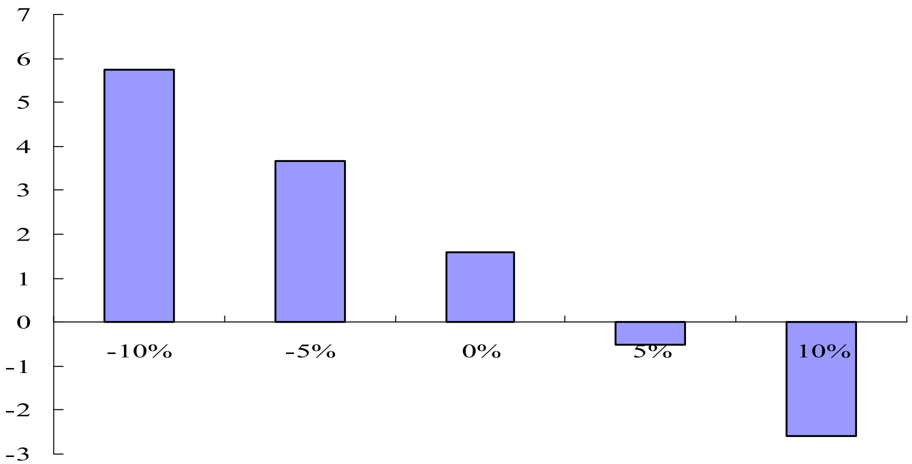
不同失效率的利润现值表

失效率变化	−20%	−10%	0%	+10%	+20%
利润现值	3.23	2.41	1.58	0.76	−0.06



不同费用率的利润现值表

费用变化	−10%	−5%	0%	+5%	+10%
利润现值	5. 75	3. 67	1. 58	−0. 5	−2. 58



定价管理的过程

定价前：定价基础的选择

- 核保体系
- 投资经验
- 费用核算
- 再保安排等等

经验数据的充足性和质量保证

定价：公司的预期目标

- 利润
- 价值
- 市场
- 品牌
- 其它

清晰的目标

合理的预期

定价后：如何实现目标

- 核保和理赔：选择能够实现目标的客户群，合理的赔款
- 投资：资产负债匹配
- 费用：控制

执行过程

结果的管理

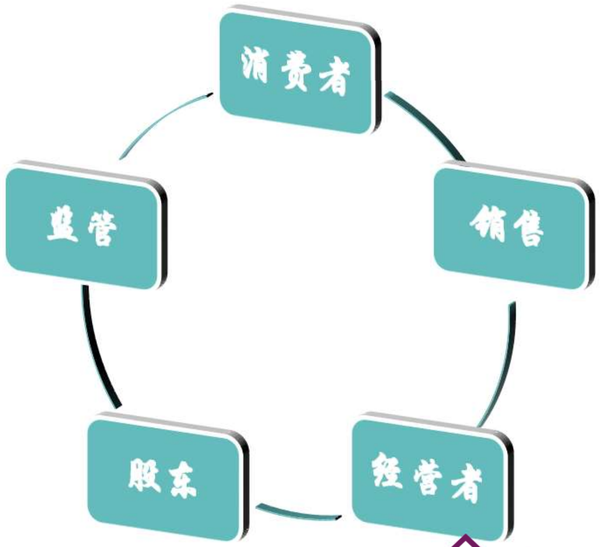
公司的利润在最大程度上是建立于精算师设计的费率结构之中？！

定价对经营结果的影响
——精算角度的定价

- 定价的基础：公司的整个系统
- 定价的过程：决策变量
  - 影响经营结果：利润目标的实现
  - 选择市场：客户群与定价假设
- 定价的后期管理：
  - 价格的确定对保险公司的各种行为提出了要求
  - 合理的价格使得未来的经营更加从容
  - 各个工作环节都应该围绕价格确定时的计划配合其完成预期的目标
- 定价结果的跟踪检验：
  - 实现预期、与预期产生较大的偏差
  - 如果环境发生变化，如何调整经营环节；同时考虑未来的价格调整

从管理学的角度看保险产品的定价

- 保险产品定价
  - 服从公司的目标
  - 公司实现目标的前提：基础
  - 如何实现目标：各个经营环节的经营结果
    - 可能性？
- 最优价格？目标决策的理论
  - 选择目标
  - 约束条件
  - 建立模型
  - 求解？



利润目标
规模目标
价值目标
偿付能力目标
……

基于多目标规划的产品定价

- 目标函数与约束
  - 目标的选择：满足各方要求
  - 公司的约束：公司的性质（如股权结构）、资产规模等
- 最优解：能否找到？
  - 转化为单目标：权重的选择？
  - 可行解集：最优解？次优解？非劣解？
- 最后的选择：决策者偏好
  - 目标优先级排序
  - 转化为单目标决策：目标权重
  - 公司的偏好
  - 决策者个人的偏好

公司治理结构

非劣解集

精算科学+管理艺术

南開大學 Nankai University

从经济学的角度看保险产品的定价

- 市场经济和费率市场化：对市场的尊重
- 供给和需求的均衡：对客户的尊重
- 同业竞争者之间的价格竞争：价格的可行性
- 价格的需求弹性：价格与业务规模之间的关系
  - 寿险和产险的差异性
- 如何找到市场均衡价格？完备市场的形成
  - 市场的细分：针对不同的客户群设计产品而形成的定价体系
- 宏观定价的思想
  - 价格与销量的关系
  - 总利润最大化

公司可以对业务数据进行经验分析和研究，寻找其中的规律，以对市场进行细分，对不同的目标市场区间开发不同的产品，可以根据不同市场区间的价格敏感程度制订不同的费率。

宏观定价法

- 根据不同的销售量水平制定不同的价格，令公司获得最大利润。定价不是从单位产品利润出发，而是根据总利润最大的原则，始终以总利润作为判断产品本身及其价格优劣的标准。
  - 传统定价方法的特征是产品的利润以每单位获利多少来度量，单位可以是每千元给付、每千元保费或每单位保费等等。然而，对保险公司来说最重要的是要知道公司能从某种产品中获得多少总利润，既价格×销售量。
  - 宏观定价法则给出一系列价格，对每一价格考虑若干种销售方案，并计算出每一价格/销售量组的总体利润，从中选取总体利润最大的一组，得到对应该价格的最优价格/销量。进而得到一系列价格/销量组合，每种组合的总利润是相等的。
  - 精算与市场销售共同确定最后的价格。

管理理念的改变

南開大學 Nankai University

第二章：寿险产品定价与准备金评估

1 生命表基础

2 寿险产品的精算定价

3 寿险产品定价实务

4 寿险准备金的概念与计算

5 寿险准备金评估实务

例子1

- 某公司发行一个5年期的投资项目（譬如债券），5年末的到期支付额是1000元，假设该项目的收益率（利率）假设是5%，则销售价格为：

$$1000\times(1+5\%)^{-5}=784$$

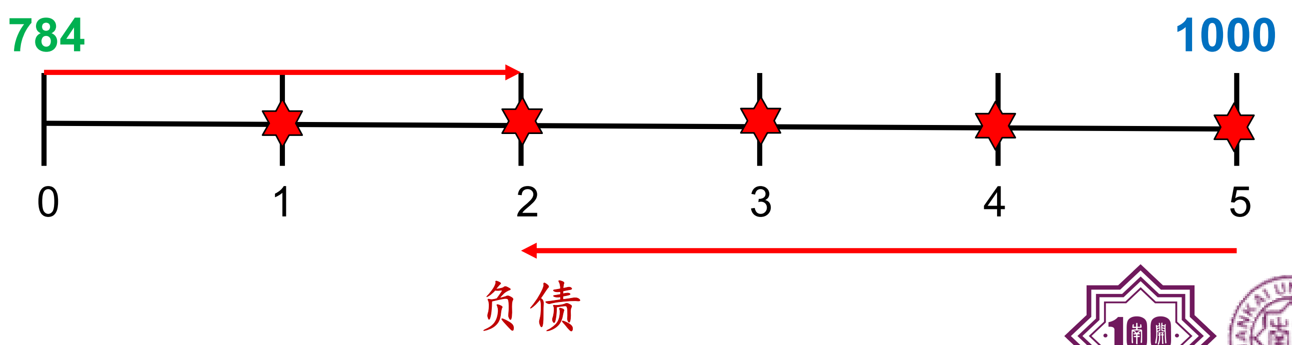
- 假设评估利率（贴现率）为5%，该公司在各年末的负债

期限	负债
1	823
2	864
3	907
4	952
5	1000

- 问题1：负债是什么含义？
- 问题2：评估利率是什么含义？
- 问题3：如何计算？

问题的解释

- 问题1：负债是什么含义？
  - 发行公司能够在5年末的时候有1000元到期支付额（责任履行），现在应该有的资金准备
  - 必须体现在财务表表中（资产负债表、损益表）
- 问题2：评估利率是什么含义？
  - 基于发行公司未来的投资收益，用于计算负债的利率假设
  - 可以等于5%，也可以不等于5%
  - 如果不等于5%, 会出现什么结果？
- 问题3：如何计算？



如何计算

- 从未来法的角度：
  - t=1：1000×(1+5%) $^{-4}$=823
  - t=2：1000×(1+5%) $^{-3}$=864
  - t=3：1000×(1+5%) $^{-2}$=907
  - t=4：1000×(1+5%) $^{-1}$=952
  - t=5：1000×(1+5%) $^{-0}$=1000
- 从过去发的角度
  - t=1：784×(1+5%) ^{1}=823
  - t=2：784×(1+5%) ^{2}=864
  - t=3：784×(1+5%) ^{3}=907
  - t=4：784×(1+5%) ^{4}=952
  - t=5：784×(1+5%) ^{5}=1000

- 问题4：过去法和未来发？
  - 相等：条件
  - 条件改变？

南開大學

Nankai University

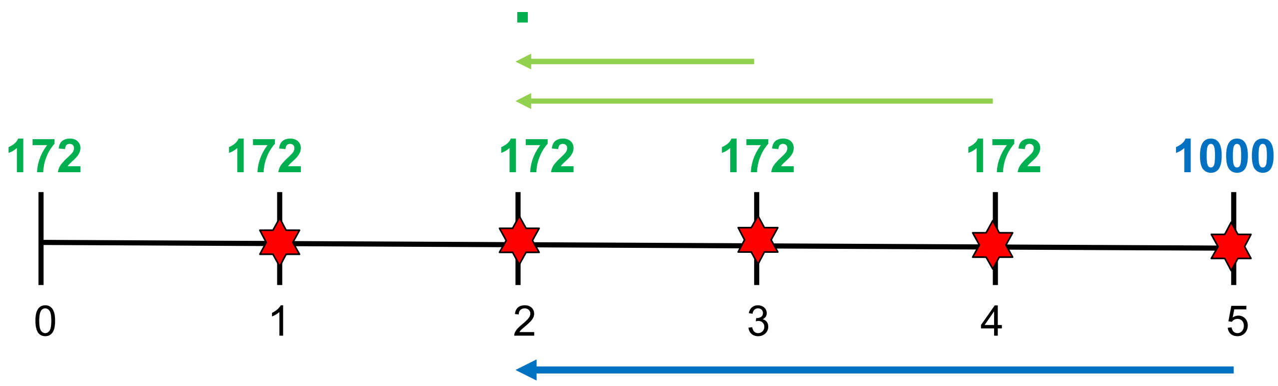
例子2

- 某公司发行一个5年期的投资项目，投资者每年初支付固定金额，5年末发行公司的到期支付额是1000元，假设该项目的收益率（利率）假设是5%，则投资人每年的支付额为：

$$1000 = R \cdot \ddot{s}_{\overline{5}|i=5\%}$$ 所以R=172

- 假设评估利率（贴现率）为5%，该发行公司在各年末的负债

期限	负债
1	181
2	371
3	571
4	780
5	1000



如何计算

- 从未来法的角度：
  - t=1：$1000\times(1+5\%)^{-4}-172\times\ddot{a}_{\overline{4|}i=5\%}=181$
  - t=2：$1000\times(1+5\%)^{-3}-172\times\ddot{a}_{\overline{3|}i=5\%}=371$
  - t=3：$1000\times(1+5\%)^{-2}-172\times\ddot{a}_{\overline{2|}i=5\%}=571$
  - t=4：$1000\times(1+5\%)^{-1}-172\times\ddot{a}_{\overline{1|}i=5\%}=780$
  - t=5：$1000\times(1+5\%)^{-0}=1000$

- 问题5：过去法如何计算？

南开大学 Nankai University

例子3

- 某公司发行一个5年期的投资项目，投资者前两年每年初支付固定金额，5年末发行公司的到期支付额是1000元，假设该项目的收益率（利率）假设是5%，则每年的支付额为：

所以R=401

- 假设评估利率（贴现率）为5%，该公司在各年末的负债？

练习

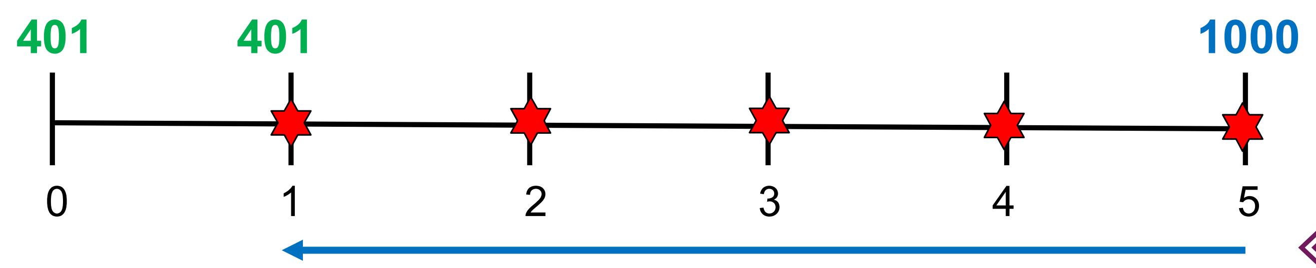
Nankai University

计算结果

- 从未来法的角度：
  - t=1：$1000\times(1+5\%)^{-4}-401=421$
  - t=2：$1000\times(1+5\%)^{-3}=864$
  - t=3：$1000\times(1+5\%)^{-2}=907$
  - t=4：$1000\times(1+5\%)^{-1}=952$
  - t=5：$1000\times(1+5\%)^{-0}=1000$

期限	负债
1	421
2	864
3	907
4	952
5	1000

期限	负债
1	823
2	864
3	907
4	952
5	1000

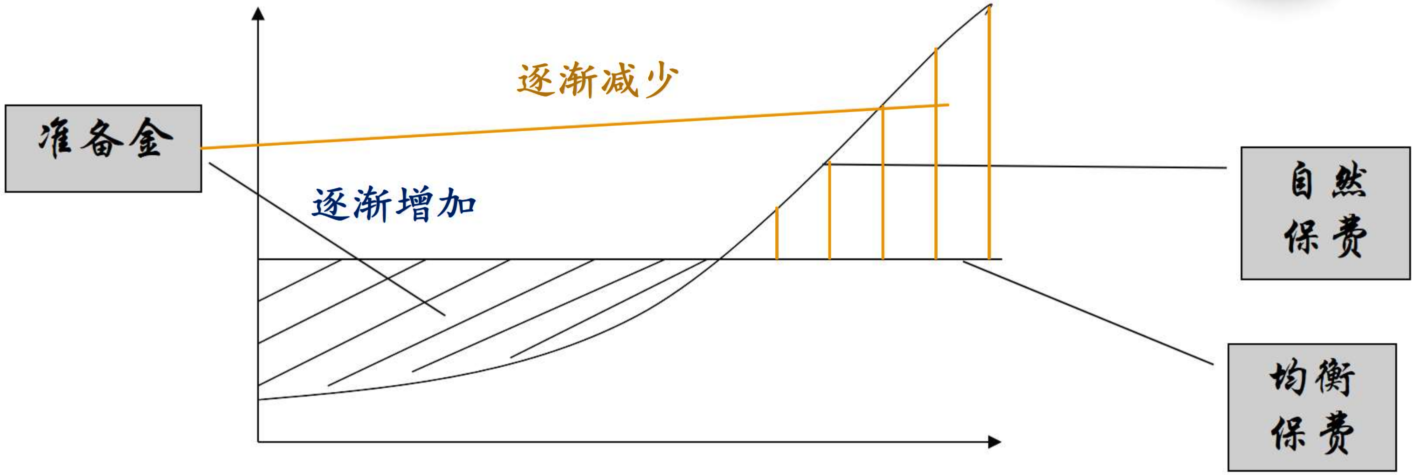


寿险准备金的概念

- 根据精算等价原理，投保人交纳的净保费与保险人未来应付的保险金在保单生效时的精算现值相等。但经过一段时间，双方未了责任和义务的等价关系会被破坏。本部分将精算等价原理应用于合同开始生效以后的时期，此时出现了一个平衡项，该平衡项是保险人对被保险人的一种负债，该平衡项称为净保费准备金，它是寿险公司在其财务报表中必须确认的负债项。
- 寿险责任准备金是指保险公司为将来要发生的保险责任而提存的资金，或者说是保险人还未履行保险责任的已收保费。
- 由于大多数长期寿险产品都采取均衡交纳保费方式，因此保单成立之初所交纳的保费中，每年都会超过自然保费，其超过部分及利息的积累，就成为责任准备金。
- 寿险公司80%～90%的负债都为寿险责任准备金负债。

南開大學 Nankai University

准备金的图示



示例：
定期寿险

保费收入1 → 费用1 / 赔款1 / 准备金1 或准备金增量1

保费收入2 → 费用2 / 赔款2 / 准备金增量2

准备金2=准备金1×（1+i）+准备金增量2

类似：准备金3=准备金2×（1+i）+准备金增量3

示例：形成过程
图中的数字表示年份。

准备金评估问题和会计核算

保费属于谁呢：

——负债评估与会计核算问题

- ➢需要留下多少钱应对未来给付—负债评估
- ➢保险公司赚了多少钱—会计评估及核算

根据保险公司的存量保单信息，计算公司要预留多少钱来偿还未来债务？

目的

- 偿付能力
- 财务报告
- 税收

科目

- 未到期责任准备金
- 未决赔款准备金

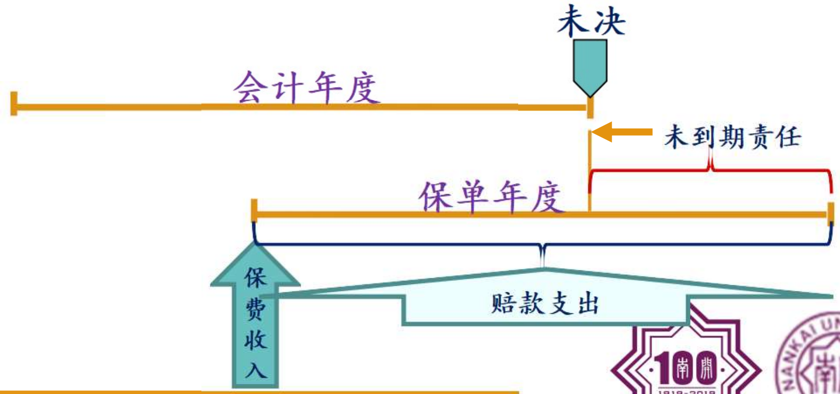
寿险：核心组成部分

准备金的类型

- 寿险责任准备金
  - 长期责任准备金（保险合同未到期）
  - 未决赔款准备金
    - 已发生已报告
    - 已发生未报告

未决赔款准备金在非寿险部分讲解。

- 财险责任准备金：短期业务准备金
  - 未到期责任准备金（保单年度和会计年度不一致）
  - 未决赔款准备金
    - 已发生已报告
    - 已发生未报告



如果每年业务规模保持不变或者稳定增长？

南開大學
Nankai University

准备金的计算方法

- 准备金是公司对客户未来的给付责任减未来保费的差值：未来的观点
- 准备金其本质是客户前期多交的保费在公司累积的部分，是公司对保户的负债，权属上属于客户。
  - 过去法：以假定的利率及生命表为依据，计算过去的保险期间中，全部已经收取的保费的终值，减去全部已经支付的保险金的终值的余额，就是该时点的准备金。
    - 过去法保单准备金=过去净保费收入终值—过去保险金给付终值
  - 未来法：以假定的利率及生命表为依据，计算未来的保险期间中，全部已经支付的保险金的现值减去全部已经收取的保费的现值的余额，就是该时点的准备金。
    - 未来法保单准备金=未来责任给付现值—未来净保费收入现值
- 计算准备金与计算保费的假设条件完全相同的情况下，计算结果是相同的。

南开大学 Nankai University

过去法和未来法：文字说明

- 初始时刻：保险金给付的现值=保费收入的现值
- t时刻:保险期间的全部保险金给付在t时刻的值
  =保险期间的全部保费收入在t时刻的值
- 过去保险金给付在t时刻的终值+未来保险金给付在t时刻的现值
  =过去保费收入在t时刻的终值+未来保费收入在t时刻的现值
- 未来保险金给付在t时刻的现值-未来保费收入在t时刻的现值
  =过去保费收入在t时刻的终值-过去保险金给付在t时刻的终值
- 未来发准备金=过去法准备金

强调：上述结论基于准备金计算的假设与保费计算假设相同
问题：如果假设不同？实际中的情况？

责任准备金：连续模型

对于(x)购买的1单位终身寿险，完全连续净保费为 $\bar{P}(\bar{A}_x)$。从保单生效时算起，

被保险人生存至 t 年末的准备金记为 ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$。

引入随机变量 U，它表示 $(x+t)$ 的剩余寿命，其概率密度函数为：

$$ {}_u p_{x+t} \cdot \mu_{x+t+u}\,,\ u \ge 0 $$

定义 t 时保险人的未来亏损随机变量为

$$ {}_t L = v^U - \bar{P}(\bar{A}_x)\cdot \bar{a}_{\overline{U|}} $$

定义 t 时的净保费准备金为亏损随机变量 ${}_t L$ 的期望，即

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = E[{}_t L] = E[v^U] - \bar{P}(\bar{A}_x)\cdot E[\bar{a}_{\overline{U|}}] $$
$$ = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\,\bar{a}_{x+t} $$

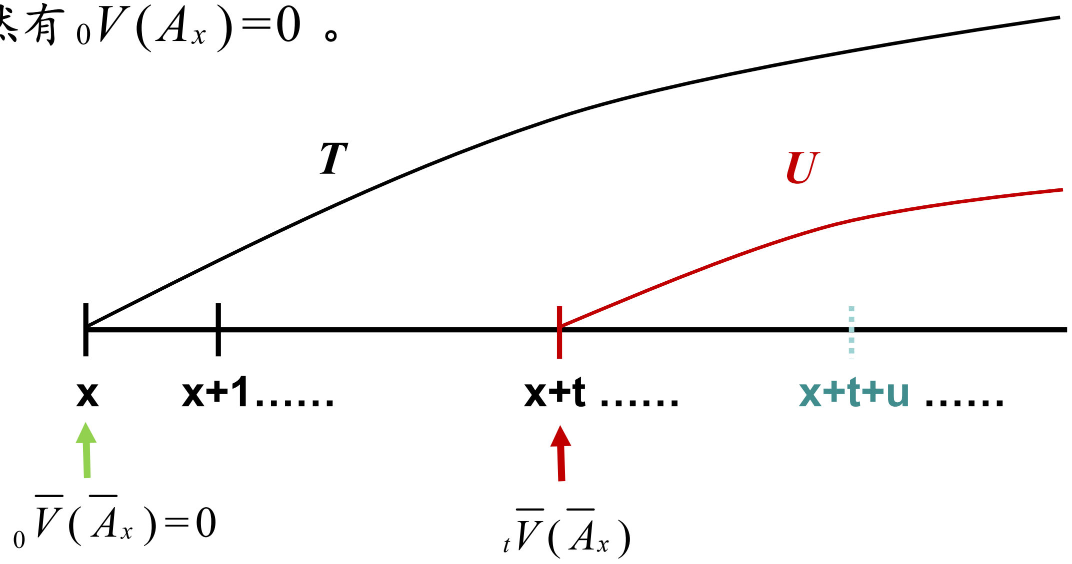
未来法的计算

原理和计算公式

责任准备金：连续模型

上式表明，时刻 t 的净保费准备金等于从 $x+t$ 岁时投保的终身寿险的精算现值，减去 $x+t$ 岁以后的年保费 $\bar{P}(\bar{A}_x)$ 的精算现值，即未来的精算责任现值扣减保费现值后的差额，这也是“未来法”的来源。

显然有 ${}_0\bar{V}(\bar{A}_x)=0$ 。



$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)=\bar{A}_{x+t}-\bar{P}(\bar{A}_x)\,\bar{a}_{x+t}$$

责任准备金：连续模型

1. 全期交费情形

(1) 终身寿险

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\,\bar{a}_{x+t} $$

(2) ***n*** 年期定期寿险

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \begin{cases} \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\,\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t < n \\ 0 & t = n \end{cases} $$

(3) ***n*** 年期两全保险

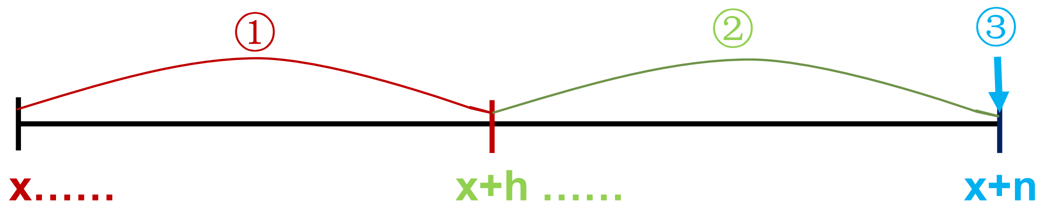
$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t < n \\ 1 & t = n \end{cases} $$

两全保险：限期交费

对于 h 年限期交费 n 年期两全保险，记其净保费准备金为 ${}_t^h\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$，其中的左上标 h 表示交费年限。

由未来法，

$$
{}_t^h\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})=\begin{cases}\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}-{}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}|} & t<h \quad ① \\ \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} \quad h\le t<n & ② \\ 1 \quad t=n & ③ \end{cases}
$$



责任准备金：限期交费

2. 限期交费情形，这里左上标 h 表示交费年限。

(1) h 年限期交费终身寿险

$$ {}^{h}_{t}\bar{V}(\bar{A}_x)=\begin{cases}\bar{A}_{x+t}-{}_{h}\bar{P}(\bar{A}_x)\,\bar{a}_{x+t:\overline{h-t|}} & t<h\\ \bar{A}_{x+t} & t\ge h\end{cases} $$

(2) h 年限期交费 n 年定期寿险

$$ {}^{h}_{t}\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}})=\begin{cases}\bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t|}}-{}_{h}\bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}})\,\bar{a}_{x+t:\overline{h-t|}} & t<h\\ \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} & h\le t<n\\ 0 & t=n\end{cases} $$

(3) h 年限期交费 n 年期两全保险

$$ {}^{h}_{t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})=\begin{cases}\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}-{}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})\,\bar{a}_{x+t:\overline{h-t|}} & t<h\\ \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} & h\le t<n\\ 1 & t=n\end{cases} $$

责任准备金：离散模型

完全离散模型：即期初交纳保费、死亡年末给付保险金，x 岁投保的年交保费为 P_x 的 1 单位终身寿险，其 k 年末的责任准备金记为 ${}_kV_x$ 。

定义 J 为 $(x+k)$的取整余命随机变量，其概率函数为

$$ {}_jp_{x+k}\cdot q_{x+k+j},\qquad j=0,1,2,\cdots $$

k 时保险人的未来亏损随机变量定义为

$$ {}_kL=v^{J+1}-P_x\cdot \ddot{a}_{\overline{J+1|}} $$

根据定义 ${}_kV_x=E[{}_kL]$ ，可得

$$ {}_kV_x=A_{x+k}-P_x\cdot \ddot{a}_{x+k} $$

此公式表明，责任准备金 ${}_kV_x$ 是从 $x+k$ 岁开始的终身寿险精算现值与未来应收保费的精算现值之差。

Nankai University

责任准备金：离散模型

1. 全期交费情形

(1) 终身寿险 $${}_kV_x = A_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k}$$

(2) n 年期定期寿险

$$ {}_kV^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A^{\,1}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^{\,1}_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} & k < n \\ 0 & k = n \end{cases} $$

(3) n 年期两全保险

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} & k < n \\ 1 & k = n \end{cases} $$

责任准备金：离散模型

2. 限期交费情形，这里左上标 h 表示交费年限。

(1) h 年限期交费终身寿险

$$ {}_k^hV_x = \begin{cases} A_{x+k} - {}_hP_x \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} & k < h \\ A_{x+k} & k \ge h \end{cases} $$

(2) h 年限期交费 n 年期定期寿险

$$ {}_k^hV^1_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A^1_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} & k < h \\ A^1_{x+k:\overline{n-k}|} & h \le k < n \\ 0 & k = n \end{cases} $$

(3) h 年限期交费 n 年期两全保险

$$ {}_k^hV_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} & k < h \\ A_{x+k:\overline{n-k}|} & h \le k < n \\ 1 & k = n \end{cases} $$

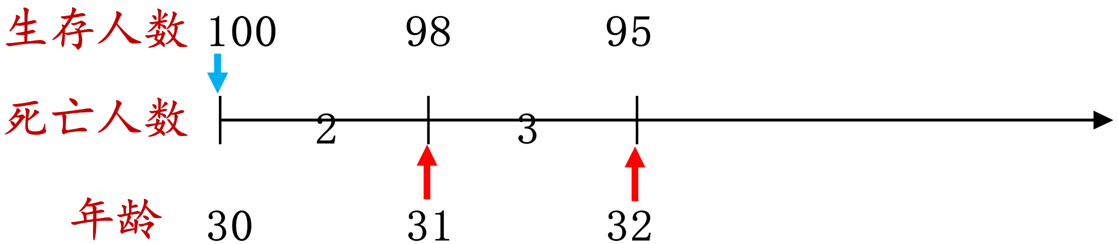
更直接的理解

- 第K年末的准备金只针对该时刻活着的人，因此：
  该时刻生存人数×准备金
  =从下年度开始的所有死亡给付总额的现值
  −从下年度开始的所有保费收入的现值
- 得到准备金的计算公式

南開大學 Nankai University

练习

- 练习：2年期定期保险，年龄为30岁。已知：30岁的生存人数为100，31岁的生存人数为98，32岁的生存人数为95。保险金额为10000元，死亡保险金在死亡年末支付，利率为3%，计算趸交净保费和各年准备金。



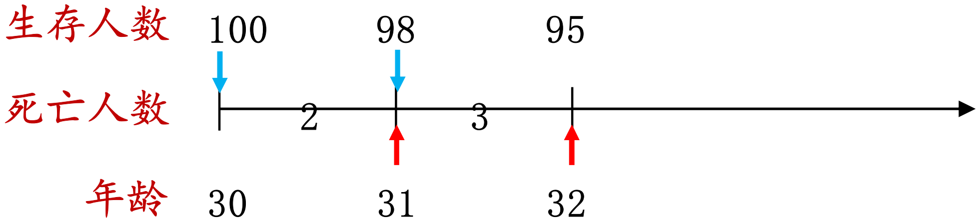
- 由已知可得：30岁的死亡人数2人，31岁的死亡人数3人。
- 用A表示本保险的趸交净保费，则：

$$100\times A=10000\times(2\times(1+3\%)^{-1}+3\times(1+3\%)^{-2})\qquad A=477\text{元}$$

- $t=1:98\times V=10000\times[3\times(1+3\%)^{-1}]$，所以$V=297$
- $t=2:95\times V=0$，所以$V=0$

练习

- 练习：2年期定期保险，年龄为30岁。已知：30岁的生存人数为100，31岁的生存人数为98，32岁的生存人数为95。保险金额为10000元，死亡保险金在死亡年末支付，利率为3%，计算均衡净保费P和各年末准备金。



- 由已知可得：30岁的死亡人数2人，31岁的死亡人数3人。
- 由已知可得：交费在期初发生，第一年交费人数为100人，第二年交费人数为98人，则：

$$100\times P+98\times P\times(1+3\%)^{-1}=10000\times(2\times(1+3\%)^{-1}+3\times(1+3\%)^{-2})$$

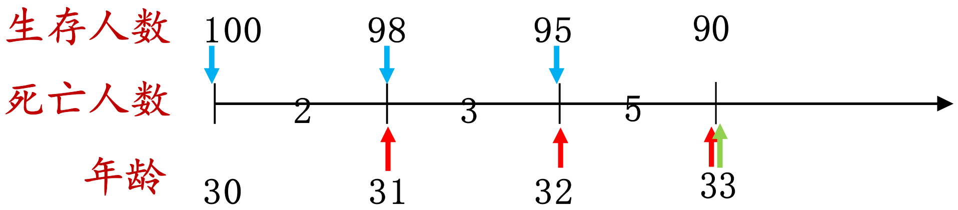
$$P=244\text{元}$$

- $t=1:98\times V=10000\times[3\times(1+3\%)^{-1}]-98\times 244$，$V=53$
- $t=2:95\times V=0$，所以$V=0$

南開大學 Nankai University

练习

- 练习：3年期两全保险，年龄为30岁。已知：30岁的生存人数为100，31岁的生存人数为98，32岁的生存人数为95，33岁的生存人数90。保险金额为10000元，死亡保险金在死亡年末支付，利率为3%。求均衡保费和各年末的准备金。



- 30岁的死亡人数2人，31岁的死亡人数3人， 32岁的死亡人数5人，33生存人数90人。
  - 保险金给付的现值：$10000\times[2\times(1+3\%)^{-1}+3\times(1+3\%)^{-2}+5\times(1+3\%)^{-3})+90\times(1+3\%)^{-3}]$
- 交费在期初发生，第一年交费人数为100人，第二年交费人数为98人，第三年交费人数为95人。
  - 均衡保费的现值：$100\times P+98\times P\times(1+3\%)^{-1}+95\times P\times(1+3\%)^{-2}$
- 计算公式为： $100\times P+98\times P\times(1+3\%)^{-1}+95\times P\times(1+3\%)^{-2}$

  $=10000\times[2\times(1+3\%)^{-1}+3\times(1+3\%)^{-2}+5\times(1+3\%)^{-3})+90\times(1+3\%)^{-3}]$

所以： P=3221元

南開大學 Nankai University

答案

- $t=1: 98\times V=10000\times[3\times(1+3\%)^{-1}+5\times(1+3\%)^{-2}+90\times(1+3\%)^{-2}]$

  $-[98\times 3221+95\times 3221\times(1+3\%)^{-1}]$

  $V=3182$

- $t=2: 95\times V=10000\times[5\times(1+3\%)^{-1}+90\times(1+3\%)^{-1}]$

  -95×3221

  $V=6527$

- $t=3: 90\times V=10000\times[90\times(1+3\%)^{0}]$

  $V=10000$

南開大學
Nankai University

责任准备金：递推公式

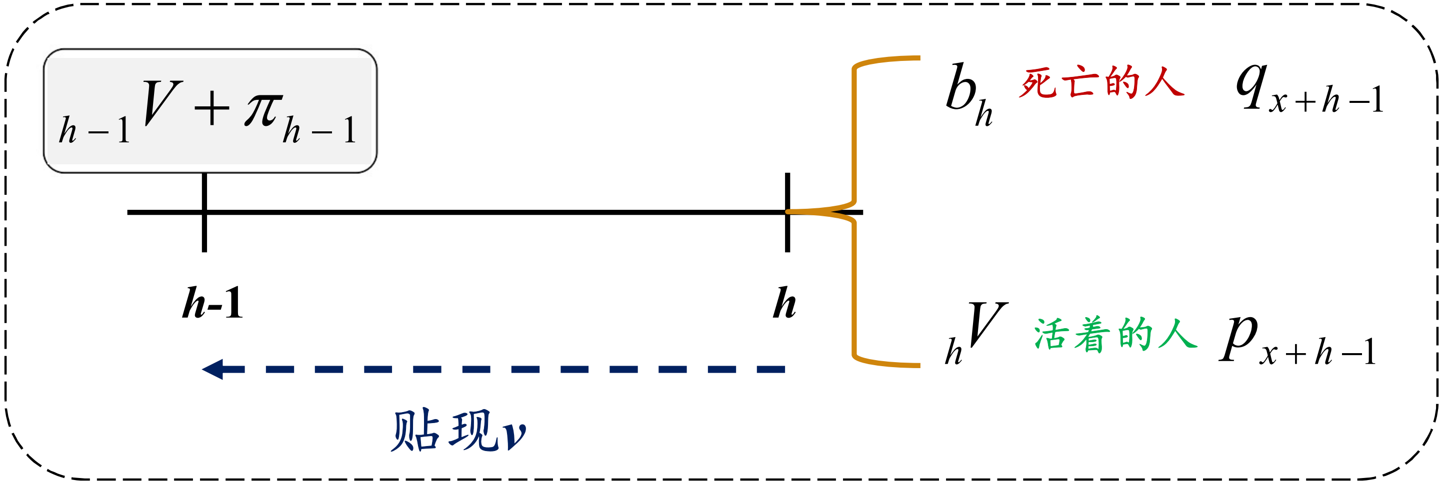
h-1年末责任准备金

h年初交纳的保费

$$ {}_{h-1}V + \pi_{h-1} = b_h \cdot v \cdot q_{x+h-1} + v \cdot p_{x+h-1} \cdot {}_{h}V $$

h年末支付的保险金

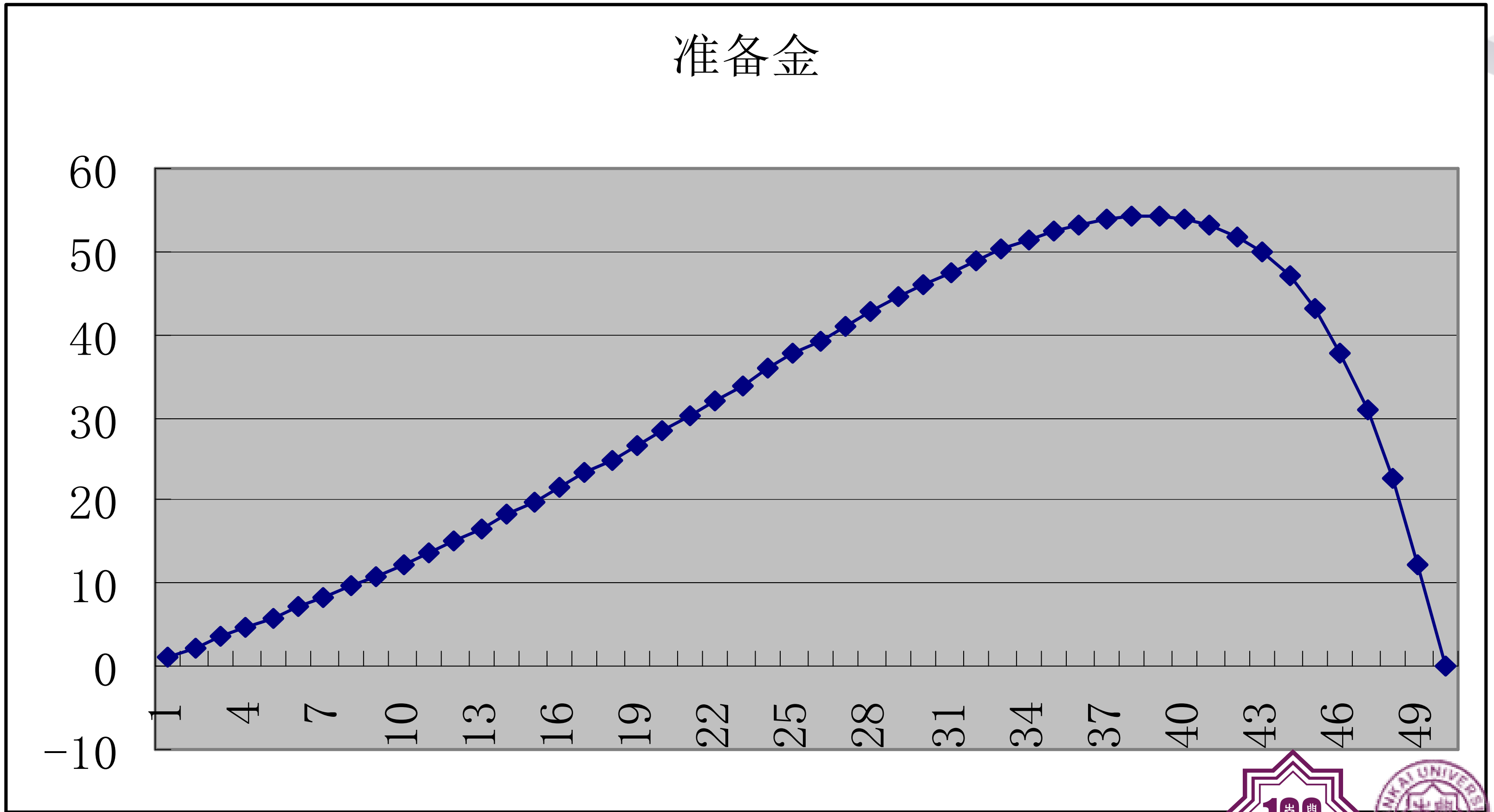
h年末责任准备金



$$ ({}_{h-1}V + \pi_{h-1})(1+i) = b_h \cdot q_{x+h-1} + p_{x+h-1} \cdot {}_{h}V $$

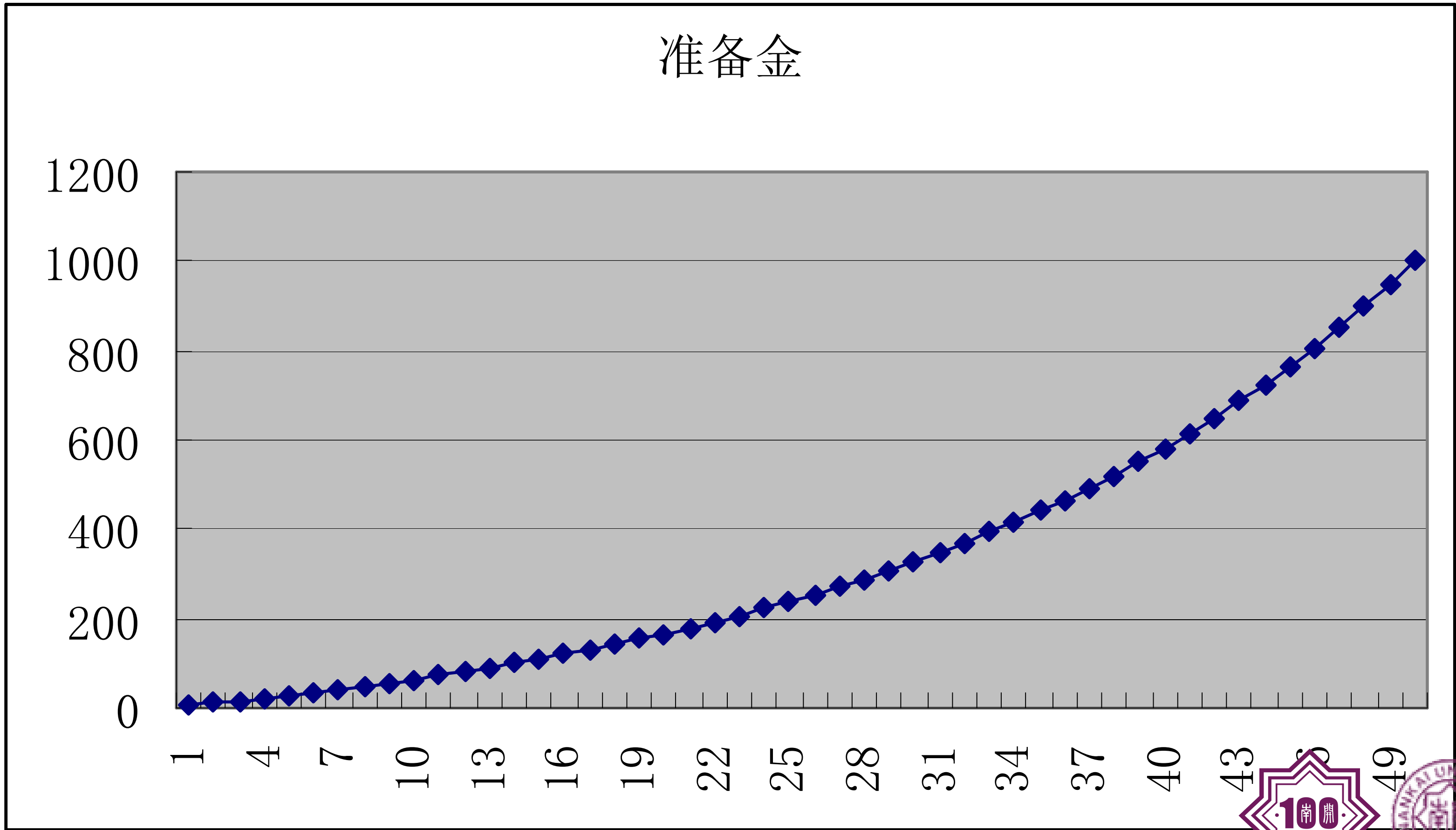
责任准备金：结果示例

1000元50年期定期保险的期末准备金

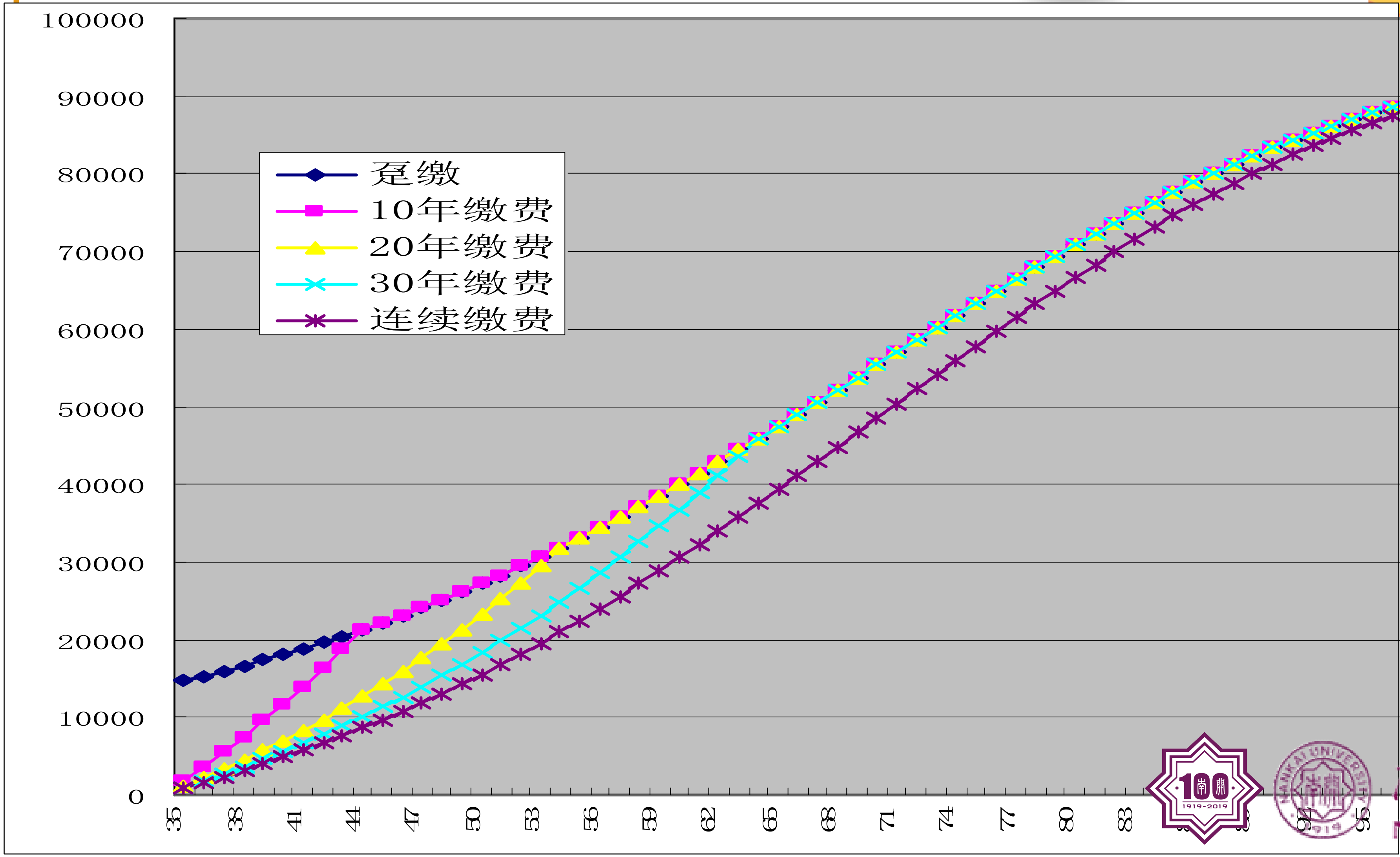


责任准备金：结果示例

1000元50年期两全保险的期末准备金



责任准备金：结果示例

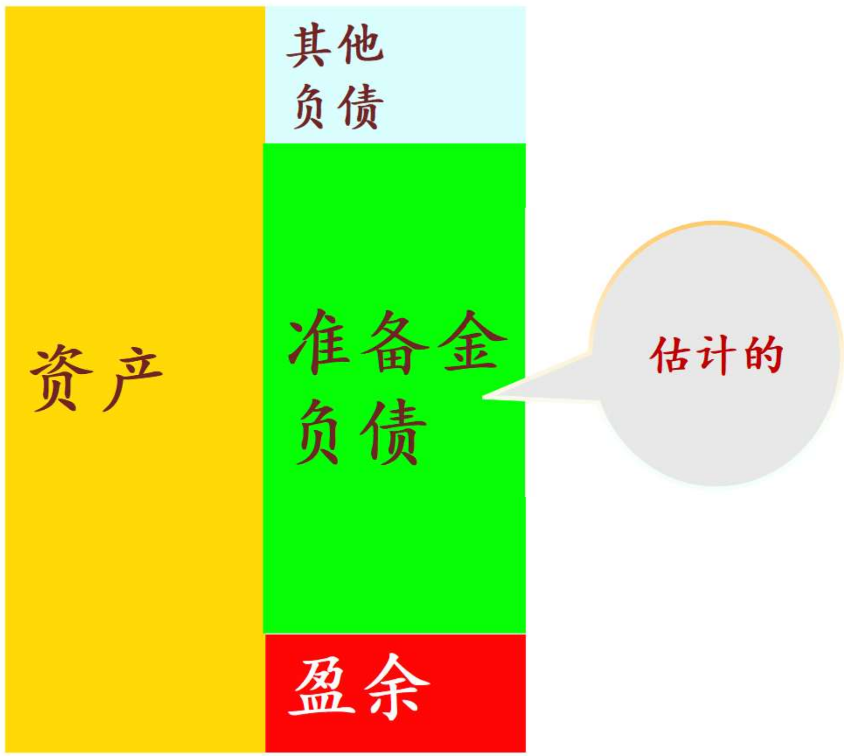


各种交费方式下终身寿险准备金的积累模式

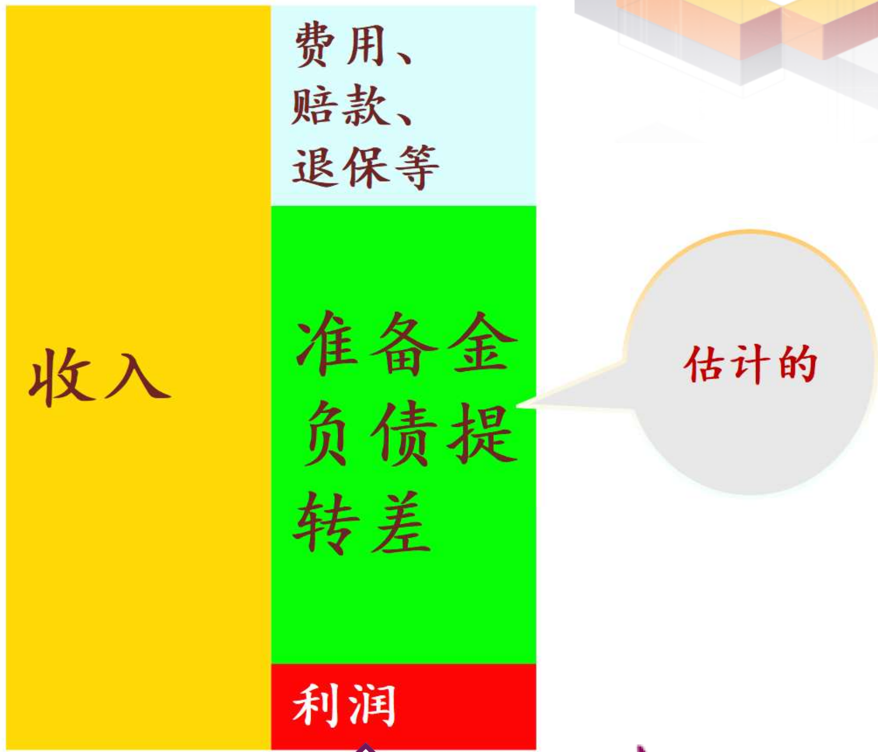
Nankai University

准备金对损益表和资产负债表的影响

- 资产负债表



- 损益表



不同生命表假设下的准备金

期间	普通寿险				期间	到65岁的两全保险			
	1941 CSO	1958 CSO	1980 CSO	中国寿险业经验生命表(1990-1993)		1941 CSO	1958 CSO	1980 CSO	中国寿险业经验生命表(1990-1993)
1	11.01	10.06	9.15	7.93	1	16.71	16.51	16.24	15.99
10	125.57	117.6	106.90	94.11	10	199.86	200.48	197.63	196.50
20	283.07	269.83	249.19	223.08	20	497.23	502.04	500.21	501.4
30	459.52	443.84	420.57	383.05	30	1000	1000	1000	1000
50	769.48	750.08	749.22	712.34					
60	872.51	869.15	868.32	827.35					

此表是35岁男性购买的普通终身寿险和30年期两全保险，当保额为1000元，利率为5%时根据不同生命表在不同时点的均衡净保费责任准备金。

不同利率假设下的责任准备金

	利率					
保单年度	2%	4%	5%	6%	7%	8%
1	2470.098	707.4694	300.9146	52.16807	-99.6104	-191.284
10	3442.454	1528.355	1010.089	656.3789	412.7306	243.4799
20	4660.81	2721.806	2113.979	1658.925	1314.783	1051.927
30	5961.57	4187.646	3559.155	3051.96	2639.422	2301.297
40	7228.176	5801.461	5241.886	4761.409	4346.693	3986.932
50	8309.541	7329.111	6912.118	6535.802	6195.168	5885.936
60	9093.465	8531.089	8277.164	8039.333	7816.236	7606.652
70	9577.175	9317.294	9194.765	9076.836	8963.274	8853.86
75	10000	10000	10000	10000	10000	10000

含义？
怎么办？

此表是30岁男性购买的10000元的终身寿险，在不同利率标准下的准备金数额

南開大學
Nankai University

对准备金的理解：实例分析

- 保险公司销售10年期产品；
- 不考虑生命因素；
- 保证利率为10%，也就是客户交纳1元钱，保险公司10年后应该支付2.59元；
- 假设保险公司发行后的实际收益分别为15%和8%；
- 对于保险公司而言：资产是什么？负债时什么？
- 选择不同的评估利率；
- 结果？

➢ 实际情况1：保证收益10%，实际收益15%

假设：评估利率10%

期间	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
负债	1	1.10	1.21	1.33	1.46	1.61	1.77	1.95	2.14	2.36	2.59
资产	1	1.15	1.32	1.52	1.75	2.01	2.31	2.66	3.06	3.52	4.05
盈余	0	0.05	0.11	0.19	0.28	0.40	0.54	0.71	0.92	1.16	1.45
利润	0	0.05	0.06	0.06	0.07	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12

2.59=(1+10%)^10
4.05=(1+15%)^10
1.45=4.05-2.59
1.61=2.59*(1+10%)^-5
2.01=(1+15%)^5
0.40=2.01-1.61
0.07=0.28-0.19(1+15%)

南開大學
Nankai University

➢ 实际情况1：保证收益10%；实际收益15%

假设：评估利率12%

期间	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
负债	1	0.94	1.05	1.17	1.31	1.47	1.65	1.85	2.07	2.32	2.59
资产	1	1.15	1.32	1.52	1.75	2.01	2.31	2.66	3.06	3.52	4.05
盈余	0	0.21	0.27	0.35	0.43	0.54	0.66	0.81	0.99	1.20	1.45
利润	0	0.21	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.05	0.06	0.06	0.07

2.59=(1+10%)^10
4.05=(1+15%)^10
1.45=4.05-2.59
1.47=2.59*(1+12%)^-5
2.01=(1+15%)^5
0.54=2.01-1.47
0.04=0.43-0.35(1+15%)

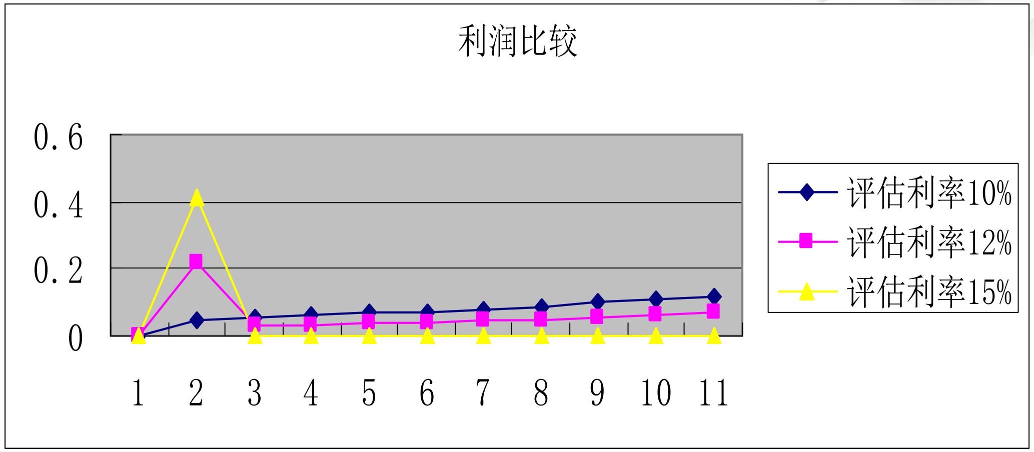
➢ 实际情况1：保证收益10%；实际收益15%
假设：评估利率15%

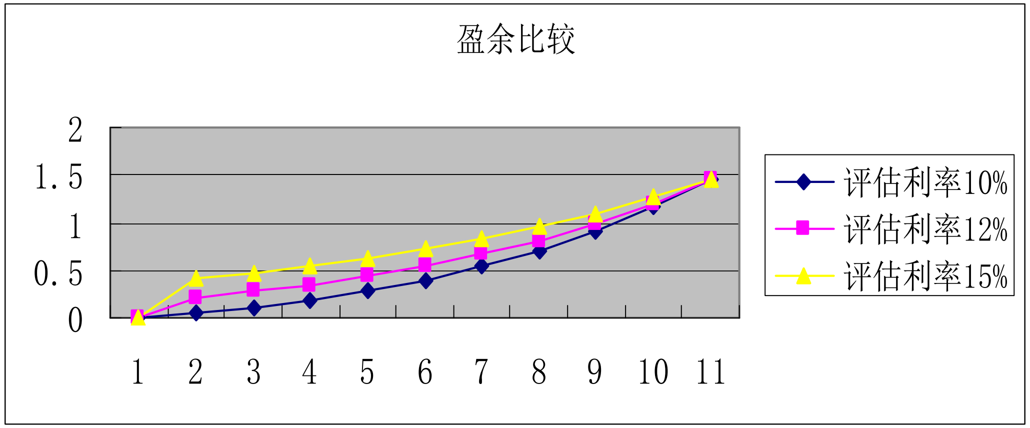
期间	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
负债	1	0.74	0.85	0.98	1.12	1.29	1.48	1.71	1.96	2.26	2.59
资产	1	1.15	1.32	1.52	1.75	2.01	2.31	2.66	3.06	3.52	4.05
盈余	0	0.41	0.47	0.55	0.63	0.72	0.83	0.95	1.10	1.26	1.45
利润	0	0.41	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

2.59=(1+10%)^10
4.05=(1+15%)^10
1.45=4.05-2.59
1.29=2.59*(1+15%)^-5
2.01=(1+15%)^5
0.72=2.01-1.29
0.00=0.72-0.63(1+15%)

分析

- 保证收益一样：10年末的终值一样（对客户的承诺）
- 实际收益一样：资产一样
- 评估利率不一样：负债（准备金）不同
- 结果：
  - 利润结构不同
  - 盈余结构不同





Nankai University

- 实际情况2：保证收益10%；实际收益8%
  假设：评估利率10%

期间	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
负债	1	1.10	1.21	1.33	1.46	1.61	1.77	1.95	2.14	2.36	2.59
资产	1	1.08	1.17	1.26	1.36	1.47	1.59	1.71	1.85	2.00	2.16
盈余	0	−0.02	−0.04	−0.07	−0.10	−0.14	−0.18	−0.23	−0.29	−0.36	−0.43
利润	0	−0.02	−0.02	−0.02	−0.03	−0.03	−0.03	−0.04	−0.04	−0.04	−0.05

➢ 实际情况2：保证收益10%；实际收益8%

假设：评估利率8%

期间	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
负债	1	1.30	1.40	1.51	1.63	1.77	1.91	2.06	2.22	2.40	2.59
资产	1	1.08	1.17	1.26	1.36	1.47	1.59	1.71	1.85	2.00	2.16
盈余	0	-0.22	-0.23	-0.25	-0.27	-0.30	-0.32	-0.35	-0.37	-0.40	-0.43
利润	0	-0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

南開大學 Nankai University

➢ 实际情况2：保证收益10%；实际收益8%；
假设：评估利率5%

期间	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
负债	1	1.67	1.76	1.84	1.94	2.03	2.13	2.24	2.35	2.47	2.59
资产	1	1.08	1.17	1.26	1.36	1.47	1.59	1.71	1.85	2.00	2.16
盈余	0	-0.59	-0.59	-0.58	-0.58	-0.56	-0.55	-0.53	-0.50	-0.47	-0.43
利润	0	-0.59	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07	0.07	0.07

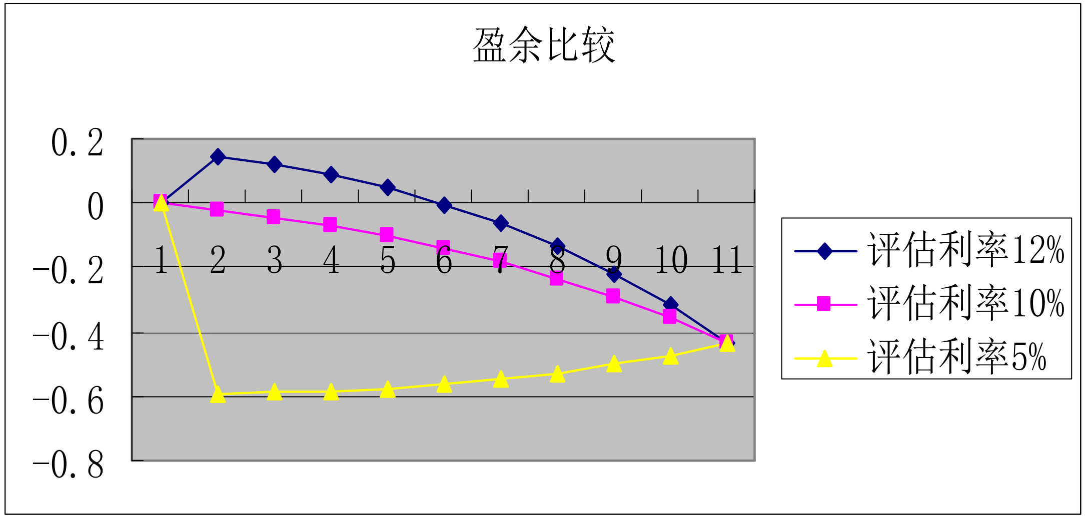
南開大學
Nankai University

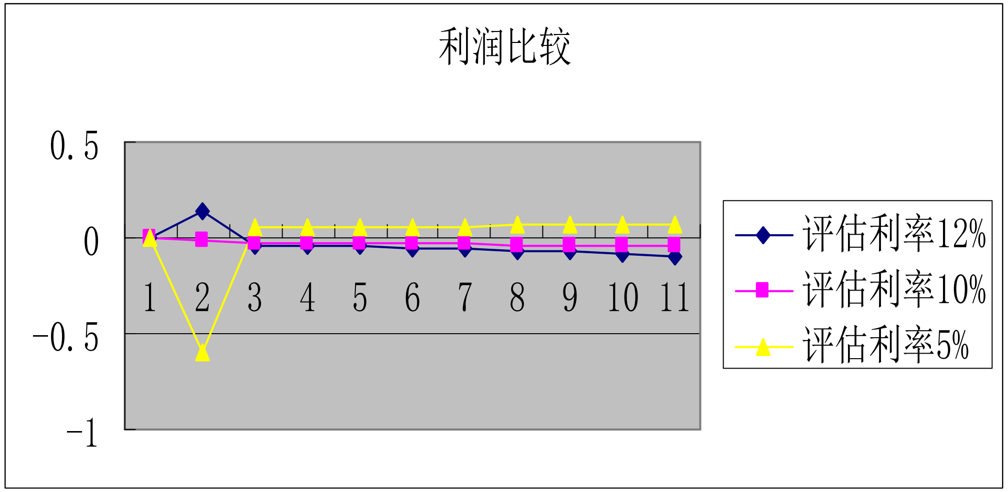
- 实际情况2：保证收益10%；实际收益8%；假设：评估利率12%

期间	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
负债	1	0.94	1.05	1.17	1.31	1.47	1.65	1.85	2.07	2.32	2.59
资产	1	1.08	1.17	1.26	1.36	1.47	1.59	1.71	1.85	2.00	2.16
盈余	0	0.14	0.12	0.09	0.05	0.00	-0.06	-0.13	-0.22	-0.32	-0.43
利润	0	0.14	-0.04	-0.04	-0.05	-0.05	-0.06	-0.07	-0.07	-0.08	-0.09

分析

- 保证收益一样：10年末的终值一样（对客户的承诺）
- 实际收益小于保证收益：亏损
- 评估利率不一样：
  - 利润结构不同：何时体现亏损
  - 盈余结构不同





思考

- 如果每年不分配利润，也不上缴税收
  - 所有的评估假设对最后的结果都是一样的
- 实际情况：如果当年有利润产生
  - 每年的红利分配（股东和保单持有人）
  - 税收
- 如果前期过于积极
  - 后期可能出现的亏损
  - 股东是否能够及时注资
  - 如果不能？
- 变化的复杂性：综合因素的影响
- 为什么采取审慎的评估假设

现金价值的概念

- 现金价值又称“退保金”或“退保价值”，是指投保人要求解约或退保时，寿险公司应该发还的金额。
- 实务中，经常会有投保人因各种原因退保，对采用均衡保费方式交费的投保人，所交纳的保费与保险成本之间的差额属于投保人。因此当投保人退保时，应当返还这一部分利益。
- 现金价值被看做投保人不可剥夺的利益，不会因停止交费而丧失。

Nankai University

现金价值的计算

- 现金价值的计算公式如下：

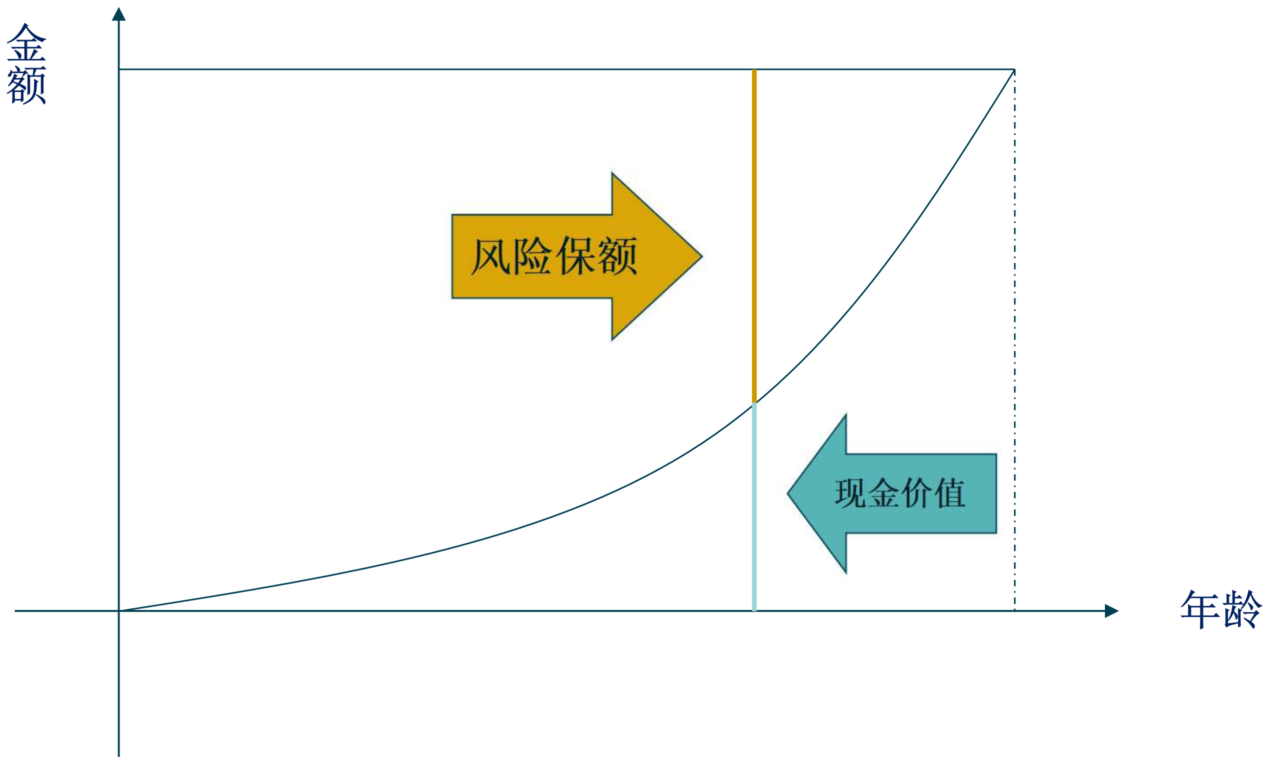
$$CV=V-SC$$

- CV表示保单在某一时刻的现金价值。
- V表示同一时刻年度末保单价值准备金。
- SC表示解约费用，一般随保单年度的递增而减少。
- 注：保单价值准备金是计算现金价值时专用的准备金

风险保额与风险净额

- 风险保额=死亡保险金 － 现金价值
  - 表示保险人所给付的死亡保险金中，除了保单持有人自己的贡献外，保险人所承担的部分。
- 风险净额=死亡保险金 －责任准备金
  - 表示保险人在履行给付责任时，除了保单现有的准备金之外，还应当支付多少。
- 责任准备金≥现金价值
- 风险净额≤风险保额

两全寿险的现金价值和风险保额



监管规定：行业标准

- 普通型人身保险精算规定（2020.1）
- 分红保险精算规定（2015.9）
- 万能保险精算规定（2015.2）
- 投资连结保险精算规定（2007.3）

- 中国第一个与精算有关的监管规定：
  - 《关于下发有关精算规定的通知》(保监发〔1999〕90号)
- 关于印发人身保险新型产品精算规定的通知（保监发〔2003〕67号）
  - 《个人分红保险精算规定》、《个人投资连结保险精算规定》、《个人万能保险精算规定》
- 关于印发投资连结保险万能保险精算规定的通知（保监寿险〔2007〕335号）
  - 《投资连结保险精算规定》、《万能保险精算规定》

南開大學 Nankai University

普通型人身保险精算规定

- 普通型人身保险
  - 人寿保险、年金保险、健康保险、意外伤害保险
- 保险金额
  - 个人普通型人寿保险的死亡保险金额与累计已交保费的比例应符合以下要求，到达年龄是指被保险人原始投保年龄加上当时保单年度数，再减去1后所得到的年龄。

到达年龄	比例下限
18－40周岁	160%
41－60周岁	140%
61周岁以上	120%

如何理解？

Nankai University 南開大學

普通型人身保险精算规定

- 保险费：保险公司厘定保险费，应当符合一般精算原理，采用公平、合理的定价假设。
- 保险公司厘定保险费的计算基础：
  - 预定利率
    - 保险期间一年以上的产品，保险公司在厘定保险费时，应根据公司历史投资回报率经验和对未来的合理预期及产品特性按照审慎原则确定预定利率。
  - 预定发生率
    - 保险公司在厘定保险费时，应以公司实际经验数据和行业公开发布的经验发生率表等数据为基础，同时考虑未来的趋势和风险变化，按照审慎原则确定预定发生率。

90号文：保险费应当根据预定利息率、预定死亡率、预定附加费用率等事项采用换算表方法进行计算。

（一）预定利息率

保险公司在厘定保险费时，应根据本公司对未来资金运用收益率的预测按照谨慎的原则确定预定利息率，所采用的预定利息率应当符合中国保险监督管理委员会的规定。（2.5%）

（二）预定死亡率

保险公司在厘定保险费时，预定死亡率应当采用中国人寿保险业经验生命表（1990—1993）所提供的数据。根据保险责任的不同，保险公司应当按照所列经验生命表的适用范围，选择使用相应的经验生命表。

南開大學 Nankai University

普通型人身保险精算规定

- 预定附加费用率
  - 保险公司在厘定保险费时，各保单年度的预定附加费用率由保险公司自主设定，但平均附加费用率不得超过下表规定的上限。平均附加费用率是指保单各期预定附加费用精算现值之和占保单毛保费精算现值之和的比例。

保险期间一年以上普通型人身保险平均附加费用率上限				
业务类型	交费方式	年金保险	两全保险	定期寿险、终身寿险、健康保险、意外伤害保险
个人	期 交	16%	18%	35%
	趸 交	8%	10%	18%
团体	期 交	10%	/	15%
	趸 交	5%	/	8%

南開大學
Nankai University

90号文：按交费期限的不同，各保单年度预定附加费用率不得超过下表规定的上限

期交保费预定附加费用率上限						
保单年度	交费期限为10年以下		交费期限为10年至19年		交费期限为20年及以上	
	死亡险、健康险	年金险、生死两全险	死亡险、健康险	年金险、生死两全险	死亡险、健康险	年金险、生死两全险
第一年	60.0%	35.0%	70.0%	45.0%	75.0%	50.0%
第二年	35.0%	20.0%	40.0%	25.0%	45.0%	25.0%
第三年	35.0%	20.0%	40.0%	25.0%	45.0%	25.0%
以后各年	25.0%	15.0%	30.0%	15.0%	30.0%	15.0%

90号文：平均附加费用率不得超过下表规定的上限

平均附加费用率上限		
交费方式	两全保险、年金保险	死亡保险、健康保险
分　期	18.0%	35.0%
趸　交	10.0%	20.0%

普通型人身保险精算规定

- 保险公司应当对定价假设相关参数进行定期回顾与分析，并根据公司实际经验及时调整相关参数。
- 保险期间超过一年或者保险期间虽不超过一年但含有保证续保条款且保证费率的期间超过一年的产品，保险公司在产品定价时应进行利润测试。

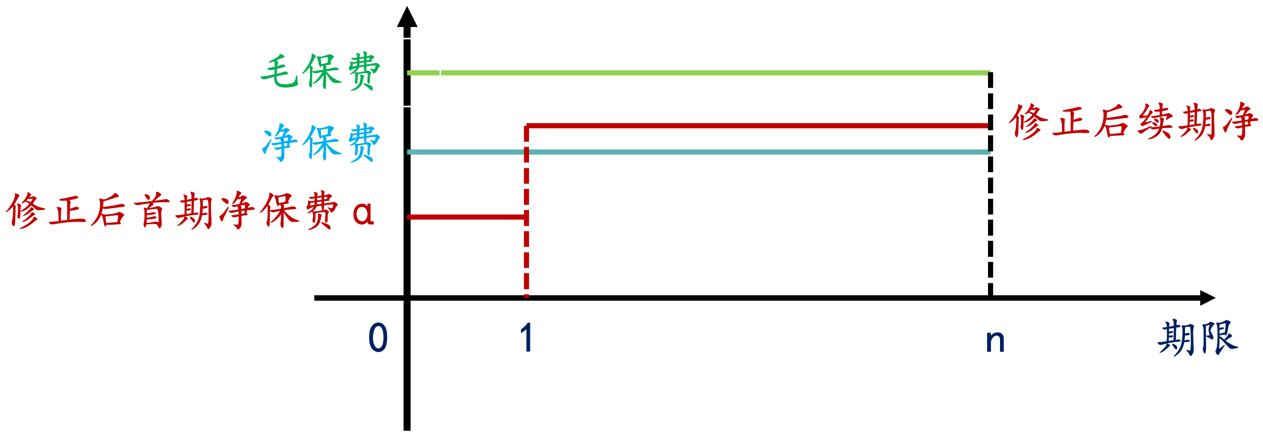
南开大学 Nankai University

普通型人身保险精算规定

- 责任准备金：法定责任准备金
- 责任准备金的计算基础
  - 评估利率
    - 保险期间一年以上的产品评估利率不得高于下面两项的较低值：
    - 中国银保监会公布的未到期责任准备金评估利率；
    - 该险种厘定保险费所使用的预定利率。
  - 评估死亡率
    - 人身保险评估死亡率采用《中国人身保险业经验生命表（2010—2013）》所提供的数据。
- 计算方法：未到期责任准备金应当用“未来法”逐单计算。
  - 终身年金以外的人身保险采用一年期完全修正方法，终身年金保险采用修正均衡净保费方法。

普通型人身保险精算规定

- 一年期完全修正方法
  - 首年评估净保费α取评估基础下首年责任精算现值
  - 修正后续年净保费β
- 按下列公式和未到期责任准备金计算基础计算：
  - α+β在交费期初的精算现值=P^{NL}在交费期初的精算现值
  - 其中P^{NL}为根据法定未到期责任准备金计算基础确定的交费期间均衡净保费。



- 一年期完全修正方法
  - 首年保费
  - 续期保费
  - 第一年末责任准备金=0

普通型人身保险精算规定

- 修正均衡净保费方法
  - 修正后首年净保费α
    - α={1-min（首年预定费用率，r）}*首年毛保费
    - 其中，个人业务r=0.35
  - 修正后续年均衡净保费β
- 按下面公式和法定未到期责任准备金计算基础计算：
  - α+β在交费期初的精算现值=P^{NL}在交费期初的精算现值
  - 其中P^{NL}为根据法定未到期责任准备金计算基础确定的交费期间均衡净保费。

普通型人身保险精算规定

- 现金价值
- 保单年度末保单价值准备金是指为计算保单年度末保单最低现金价值，按照本条所述计算基础和计算方法算得的准备金数值。计算基础：
  - 发生率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定发生率；
  - 利率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定利率加上2%；
  - 个人普通型人身保险的附加费用率采用下表规定的数值进行计算：

保单年度			第一年	第二年	第三年	以后各年
趸交	定期寿险、终身寿险、健康保险、意外伤害保险		18%	/	/	/
	两全保险		10%	/	/	/
	年金保险		8%	/	/	/
期交	交费期为10年以下	定期寿险、终身寿险、健康保险、意外伤害保险	65%	50%	35%	10%
		两全保险	35%	20%	20%	10%
		年金保险	30%	20%	15%	10%
	交费期为10年至19年	定期寿险、终身寿险、健康保险、意外伤害保险	80%	75%	60%	10%
		两全保险	45%	25%	25%	10%
		年金保险	40%	25%	15%	10%
	交费期为20年及以上	定期寿险、终身寿险、健康保险、意外伤害保险	85%	80%	75%	10%
		两全保险	50%	25%	25%	10%

普通型人身保险精算规定

- 计算方法
  - 根据该保单的保险责任和各保单年度净保费，按上述计算基础采用“未来法”计算。
  - 保单各保单年度净保费为该保单年度的毛保费扣除附加费用。其中，毛保费是指按保单年度末保单价值准备金的计算基础重新计算的保险费，附加费用为毛保费乘以上表中规定的附加费用率。
- 保单年度末保单价值准备金不包括该保单在保单年度末的生存给付金额。
- 保单年度末保单最低现金价值是保险公司确定保单现金价值最低标准，其计算公式为：

普通型人身保险精算规定

$$MCV = r \times \max(PVR, 0)$$

系数 r 按下列公式计算：

$$r = k + \frac{t \times (1-k)}{\min(20, n)}, t < \min(20, n)$$

$$r = 1, t >= \min(20, n)$$

- 其中：
  - MCV为保单年度末保单最低现金价值；
  - PVR为保单年度末保单价值准备金；
  - n为保单交费期间（趸交保费时，n=1）；
  - t为已经过保单年度，t=1,2,…；
  - 参数k的取值按如下标准：

k值			
业务类型	年金保险	两全保险	定期寿险、终身寿险、健康保险、意外伤害保险
期交个人业务	0.9	0.85	0.8
期交团体业务	0.95	/	0.85
趸交个人业务	1	1	1
趸交团体业务	1	/	1

- n=1，r=1
- n=10
  - t=1，r=0.8+(1-0.8)/10=0.82
  - t=5，r=0.8+5*(1-0.8)/10=0.9
  - t=10，r=0.8+10*(1-0.8)/10=1
- n=20
  - t=1，r=0.8+(1-0.8)/20=0.81
  - t=10，r=0.8+10*(1-0.8)/20=0.9
  - t=20，r=0.8+20*(1-0.8)/20=1

南開大學 Nankai University

普通型人身保险精算规定

- 保险公司可以将按本规定所确定的保单年度末保单最低现金价值作为保单年度末保单现金价值，也可以按其他合理的计算基础和方法确定保单现金价值，但要保证其数值不低于按本规定所确定的保单年度末保单最低现金价值。
- 最低不丧失价值条款

南開大學
Nankai University

谢谢！