精算概论第一次作业：生命表答案

庄源

目录

1 生存概率 Survival Probability

1.1 原题

已知生存函数 $s(x) = 1 - \dfrac{x}{105}, \quad 0 \le x \le 105$，计算：

1. 新生婴儿在 60 岁到 70 岁之间死亡的概率；
2. 60 岁的人在 70 岁以前死亡的概率；
3. 50 岁的人能活到 70 岁的概率；
4. 50 岁的人在 60 岁到 70 岁之间死亡的概率。

1.2 参考答案

知识点： 第二章 PPT 中“生命表的理论基础：连续模型”一节，位置为 PPT 29-31 面。

1. $\Pr(60 < x \leqslant 70) = s(60) - s(70) = \dfrac{2}{21} = 0.0952$;

2. $\Pr(60 < x \leqslant 70 \mid x > 60) = \dfrac{s(60) - s(70)}{s(60)} = \dfrac{2}{9} = 0.2222$;

3. $\Pr(x > 70 \mid x > 50) = \dfrac{s(70)}{s(50)} = \dfrac{7}{11} = 0.6364$;

4. $\Pr(60 < x \leqslant 70 \mid x > 50) = \dfrac{\Pr(60 < x \leqslant 70)}{s(50)} = \dfrac{2}{11} = 0.1818$。

1.3 赋分及批改情况

表 1: Question 1 给分标准（共 20 分）

采分点	分值
第 1 问	5
第 2 问	5
第 3 问	5
第 4 问	5

此题完成情况很好。

2 填写生命表 Complete Life Table

2.1 原题

给定下列生命表，填写表中的空格。

x	ℓ_x	q_x	d_x
60	1000	0.020	
61			31
62			32
63			29
64		0.028	

2.2 参考答案

知识点：第二章 PPT 中“生命表的要素及其数学关系”一节，位置为 PPT 18-20 面。主要应用的公式为：

$$\ell_x \times q_x = d_x \tag{1}$$

$$\ell_x - d_x = \ell_{x+1} \tag{2}$$

完整表格如下所示：

x	ℓ_x	q_x	d_x
60	1000	0.020	20
61	980	0.032	31
62	949	0.034	32
63	917	0.032	29
64	888	0.028	25

2.3 赋分及批改情况

右下角的空为 2 分，其余空皆为 1 分。完成情况较好。

3 生存概率公式 Survival Probability

3.1 原题

已知 $\Pr[6 < T(60) \leq 7] = 0.2185$，$\Pr[T(60) > 6] = 0.9394$，求 q_{66}。

3.2 参考答案

知识点： 第二章 PPT 中“生命表的要素及其数学关系”一节，位置为 PPT 22 面。

$$q_{66} = \frac{\Pr[6 < T(60) \leqslant 7]}{\Pr[T(60) > 6]} = \frac{0.2185}{0.9394} = 0.2326$$

3.3 赋分及批改情况

本题 5 分。班级基本全对。

4 期望取整余命 Curtate Expectation of Life

4.1 原题

求 K 的期望值，简化并解释其含义。

4.2 参考答案

知识点： 第二章 PPT 中“生命表的理论基础：离散模型”一节，位置为 PPT 34 面。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(K) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{d_{x+k}}{\ell_x} &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\ell_{x+k} - \ell_{x+k+1}}{\ell_x} \\
&= \frac{1}{\ell_x} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (\ell_{x+k} - \ell_{x+k+1}) \\
&= \frac{1}{\ell_x} \left[0\ell_x - 0\ell_{x+1} + \ell_{x+1} - \underline{\ell_{x+2} + 2\ell_{x+2}} - \underline{2\ell_{x+3} + 3\ell_{x+3}} - 3\ell_{x+4} + \cdots \right] \\
&= \frac{1}{\ell_x} \sum_{k=1}^{\infty} \ell_{x+k} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x
\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(K)$ 即是期望取整余命，上式表示：(x) 岁的人的期望取整余命为当前到未来每一年仍存活的概率之和，也暗含了死亡位于期初的假设。

4.3 赋分及批改情况

表 2: Question 4 给分标准（共 10 分）

采分点	分值
正确列出 $\mathrm{E}(K)$ 的计算式	5
化简计算式并得到 $\sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x$	2
解释 $\mathrm{E}(K)$ 和最终结果的含义	3

很多同学漏了解释最终结果含义，还有小部分同学没有做化简，整体来说完成情况不好。

5 死力与其它量的关系 Force of Mortality

5.1 原题

假设 $\mu_x = \dfrac{1}{1+x}, x \geq 0$。求：

1. X 的生存函数与密度函数；
2. $T(x)$ 的生存函数与密度函数；
3. ${}_{10|5}q_{30}$；
4. 平均寿命和 30 岁的平均余命。

5.2 参考答案

知识点：第二章 PPT 中“生命表的理论基础：连续模型”一节，位置为 PPT 33 面。

1. $S_X(x) = e^{-\int_0^x \mu_s ds} = \dfrac{1}{1+x} \quad (x \geqslant 0), \quad f_X(x) = -S'_X(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \quad (x \geqslant 0)$

2. $S_T(t) = e^{-\int_x^{x+t} \mu_s ds} = \dfrac{1+x}{1+x+t} \quad (x \geqslant 0), \quad f_T(t) = \dfrac{1+x}{(1+x+t)^2} \quad (x \geqslant 0)$

3. ${}_{10|5}q_{30} = \dfrac{S_X(40) - S_X(45)}{S_X(30)} = \dfrac{\frac{1}{41} - \frac{1}{46}}{\frac{1}{31}} = 0.0822$

4. 设年龄上限为 ω，则有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) = \int_0^\omega x f(x) dx = \int_0^\omega \frac{x}{(1+x)^2} dx &= \int_0^\omega \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right] dx \\
&= \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right]\Bigg|_0^\omega \\
&= \ln(1+\omega) - \frac{\omega}{1+\omega}
\end{aligned}
$$

令 $\varphi = \omega - 30$，则 30 岁的平均余命为：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(T) = \int_0^\varphi t \cdot \frac{1+30}{(1+30+t)^2} dt &= 31 \int_0^\varphi \frac{t}{(31+t)^2} dt \\
&= 31 \int_0^\varphi \left[\frac{1}{31+t} - \frac{31}{(31+t)^2}\right] dt \\
&= 31 \left[\ln(31+x) + \frac{31}{31+x}\right]\Bigg|_0^\varphi \\
&= 31 \left(\ln \frac{31+\varphi}{31} - \frac{\varphi}{31+\varphi}\right)
\end{aligned}
$$

5.3 赋分及批改情况

表 3: Question 5 给分标准（共 20 分）

采分点	分值
第 1 问	4
第 2 问	4
第 3 问	4
第 4 问	8

本题完成情况较差，主要错误为：

- 在 $f_X(x) = -S'_X(x)$ 这个式子中，很多同学漏了其中的负号，导致求得的密度函数有错。
- 本题若不设置年龄上限 ω，则无法得出答案。部分同学在第四小题积到 $+\infty$，没有完成全部推导，只能得到一部分分数。
- 很多同学使用 $\overset{\circ}{e}_x = \int_0^\omega {}_tp_x dt$ 来求得平均寿命和平均余命，只能得到部分分数，因为该公式在固定积分上限 ω 下并不成立，只有在积分上限为 $+\infty$ 时才能成立。下面使用分部积分法证明上述结论：

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{e}_x &= \int_0^\infty t f_T(t) dt \\ &= -\int_0^\infty t\left(\frac{d}{dt}{}_tp_x\right) dt \\ &= -\left(t\,{}_tp_x|_0^\infty - \int_0^\infty {}_tp_x dt\right)\end{aligned}$$

在生存模型相关理论中，一般假设：

  - 对于所有 $t > 0$，${}_tp_x$ 可导；
  - $\lim_{t\to\infty} t\,{}_tp_x = 0$；
  - $\lim_{t\to\infty} t^2\,{}_tp_x = 0$

因此在积分上限为正无穷时，有 $\overset{\circ}{e}_x = \int_0^{+\infty} {}_tp_x dt$，但对于固定积分上限 ω，没有这样的结论。

以下是可以得分的**其它解法**：

- 部分同学设置的年龄上限为 100、105 这样具体的数字，也可以得分。但推导公式时尽量要采用一般化的写法。

6 常死力假设 Constant Force of Mortality

6.1 原题

假设死力为常数，给出 X 的生存函数、密度函数和平均寿命的表达式。

6.2 参考答案

知识点： 第二章 PPT 中“生命表的理论基础：连续模型”一节，位置为 PPT 28-29 面。

设死力为 μ，终极年龄为 ω，则：

$$S_X(x) = e^{-\int_0^x \mu ds} = e^{-\mu x}$$

$$f_X(x) = -S'_X(x) = \mu e^{-\mu x}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^\omega x f_X(x) dx = \int_0^\omega x \cdot \mu e^{-\mu x} dx = \int_0^\omega -x \cdot d(e^{-\mu x}) \\
&= -\left. x e^{-\mu x} \right|_0^\omega + \int_0^\omega e^{-\mu x} dx \\
&= -\omega e^{-\mu\omega} + \left. \frac{e^{-\mu x}}{-\mu} \right|_0^\omega \\
&= -\omega e^{-\mu\omega} + \frac{1}{\mu} - \frac{e^{-\mu\omega}}{\mu}
\end{aligned}$$

6.3 赋分及批改情况

表 4: Question 6 给分标准（共 10 分）

采分点	分值
生存函数	3
密度函数	3
平均寿命	4

本题完成情况较好，部分同学在计算平均寿命时积分上限设为正无穷，从而得到 $1/\mu$ 的答案，此种情况也给分。

7 EXCEL 与生命表 EXCEL and Life Table

7.1 原题

注. 本题有相应的 EXCEL 表格，请点击 [下载]。

选择中国人寿保险业经验生命表（2010-2013）男（CL1）（即课件例题与练习部分所用的生命表），利用 EXCEL 计算每个年龄的生存概率、生存人数、死亡人数和平均余命，假设 0 岁时的生存人数为 10000。

7.2 参考答案

请点击 [下载] 答案，可以参考其中的 EXCEL 公式。

知识点补充：假定死亡者都在年初死亡，则 x 岁后第一年全体生存的年数共 ℓ_{x+1} 年，同理第二年全体生存年数为 ℓ_{x+2} 年。以此类推，x 岁的人总生存年数为：$\ell_{x+1}+\ell_{x+2}+\ell_{x+3}+\cdots+\ell_{\omega}$ 。则每个（x）的人未来生存的平均年数为

$$\frac{\ell_{x+1}+\ell_{x+2}+\ell_{x+3}+\cdots+\ell_{\omega}}{\ell_x} \tag{3}$$

上面的公式可以用来算期望**取整**余命，也就是 K 的期望，但本题要求算的是平均余命，也就是 T 的期望。这时假设所有的人都在年初死亡明显不合理。在精算学中，我们一般假定一年中死亡人数呈均匀分布，或可假定于年中死亡，即每人应该比年初死亡平均多活半年，所以平均余命的计算公式为：

$$\frac{\ell_{x+1}+\ell_{x+2}+\ell_{x+3}+\cdots+\ell_{\omega}}{\ell_x}+0.5 \tag{4}$$

7.3 赋分及批改情况

表 5: Question 7 给分标准（共 20 分）

采分点	分值
生存概率	3
生存人数	3
死亡人数	4
使用式(4)计算平均余命	10

本题完成情况很差，以下为典型错误：

- 题目中已经明确说明："假设 0 岁时的生存人数为 10000"，有非常非常多同学搞错了这一点，在 0 岁的生存人数中填了 9991（这本来是 1 岁的生存人数），导致连锁错误；
- 死亡人数就是 d_x，也就是从 x 到 $x+1$ 死去的人数，但是有部分同学认为 0 岁到 1 岁不死人，在死亡人数那里填了 0，导致后续错误；
- 相当多同学使用式(3)而不是式(4)计算平均余命，这类同学统一扣了 3 分。

此外，生存人数和死亡人数无论有无取整，都得分。

8 生存概率 Survival Probability

8.1 原题

已知如下生命表：

x	q_x
60	0.001
61	0.002
62	0.003
63	0.004
64	0.005

求 ${}_{2|3}q_{60}$。

8.2 参考答案

知识点：第二章 PPT 中“生命表的要素及其数学关系”一节，位置为 PPT 19-20 面。

$$
\begin{aligned}
{}_{2|3}q_{60} &= {}_2p_{60} - {}_5p_{60} \\
&= (1-0.001)(1-0.002) - (1-0.001)(1-0.002)(1-0.003)(1-0.004)(1-0.005) \\
&= 0.0119
\end{aligned}
$$

8.3 赋分及批改情况

本题 5 分。班级基本全对。

9 死力变化 Change in Force of Mortality

9.1 原题

假设死力为 μ_x，此时 $q_{70} = 0.01$。若死力发生变化，新的死力为 $\mu'_x = 0.5\mu_x + 0.1$ 。求新的生存率 p'_{70} 。

9.2 参考答案

知识点：第二章 PPT 中“生命表的理论基础：连续模型”一节，位置为 PPT 32 面。

$$
\begin{aligned}
p'_{70} = \exp\left(-\int_0^1 \mu'_{70+t}dt\right) &= \exp\left(-\int_0^1 0.5\mu_{70+t}dt\right) \cdot \exp\left(-\int_0^1 0.1dt\right) \\
&= 0.99^{0.5}e^{-0.1} = 0.9003
\end{aligned}
$$

9.3 赋分及批改情况

本题不计入最终得分。