

精算概论第二次作业：寿险定价答案

庄源

目录

1	期末给付型保险定价 Insurance Paid at the End of the Death Year	2
2	期末给付型保险定价 Insurance Paid at the End of the Death Year	3
3	连续给付型保险定价及分位数保费 Insurance Paid Immediately	4
4	连续给付型保险及中心极限定理 Insurance Paid Immediately and CLT	5
5	赔付现值随机变量的均值与方差 $E(\cdot)$ and $\text{Var}(\cdot)$ of Present Value RVs	6
6	生存保险的现值 PV of Pure Endowment Insurance	7

1 期末给付型保险定价 Insurance Paid at the End of the Death Year

1.1 原题

现有 5 年期两全保险，投保年龄为 30 岁。已知：30 岁的生存人数为 100，31 岁的生存人数为 99，32 岁的生存人数为 97，33 岁的生存人数 95，34 岁的生存人数 90，35 岁的生存人数 85。假设死亡保险金额为 10000 元，死亡保险金在死亡年末支付，期满生存保险金额为 5000 元，利率为 3%。

1. 求趸缴净保费。
2. 假设缴费期为 5 年，求年缴净保费；
3. 假设缴费期为 3 年，求年缴净保费；
4. 假设缴费期为 3 年，第一年的费用比例为 30%，第二年费用比例为 20%，第三年费用比例为 10%，求年缴毛保费。

1.2 参考答案

知识点：第二章 PPT 中“两全寿险的均衡保费”和“毛保费”，位置为 PPT 89-90、92-93 面。

1. 设趸缴净保费为 P ，则有：

$$Pl_{30} = 10000 \times (d_{30}v + d_{31}v^2 + d_{32}v^3 + d_{33}v^4 + d_{34}v^5) + 5000l_{35}v^5$$

上式表示：为得到平衡保费，期望净保费现值应等于期望保险给付现值¹。解得 $P = 5010.27$ 。

2. 设五年期缴的年缴净保费为 P_5 ，则有：

$$P_5 \times (l_{30} + l_{31}v + l_{32}v^2 + l_{33}v^3 + l_{34}v^4) = 10000 \times (d_{30}v + d_{31}v^2 + d_{32}v^3 + d_{33}v^4 + d_{34}v^5) + 5000l_{35}v^5$$

解得 $P_5 = 1102.49$ 。

3. 设三年期缴的年缴净保费为 P_3 ，则有：

$$P_3 \times (l_{30} + l_{31}v + l_{32}v^2) = 10000 \times (d_{30}v + d_{31}v^2 + d_{32}v^3 + d_{33}v^4 + d_{34}v^5) + 5000l_{35}v^5$$

解得 $P_3 = 1742.41$ 。

4. 设三年期缴的年缴毛保费为 G ，则有：

$$G \times (l_{30} + l_{31}v + l_{32}v^2) = 10000 \times (d_{30}v + d_{31}v^2 + d_{32}v^3 + d_{33}v^4 + d_{34}v^5) + 5000l_{35}v^5 \\ + Gl_{30} \times 30\% + Gl_{31}v \times 20\% + Gl_{32}v^2 \times 10\%$$

解得 $G = 2186.16$ 。

¹两全保险需要为每年的死亡人员（即 $d_{30} \sim d_{34}$ ）给付死亡保险金额，还需要为保险期末存活人员（即 l_{35} ）支付期满生存保险的金额。

1.3 赋分及批改情况

表 1: Question 1 给分标准 (共 25 分)

采分点	分值
第 1 问	5
第 2 问	6
第 3 问	6
第 4 问	8

本题完成情况较好。部分同学计算出错，还有小部分同学没搞懂两全保险的给付规则。

2 期末给付型保险定价 Insurance Paid at the End of the Death Year

注. 本题有 EXCEL 答案，供同学们学习参考使用。[[下载](#)]

2.1 原题

假设利率为 2%，保额为 10000 元，死亡保险金在死亡年末支付。依据下表，计算 30 岁男性购买的 3 年期两全保险的趸缴净保费和 3 年期缴费的年缴净保费。

表 2: 男性各年龄死亡率

年龄	死亡率
25	0.000615
26	0.000644
27	0.000675
28	0.000711
29	0.000751
30	0.000797
31	0.000847
32	0.000903
33	0.000966
34	0.001035
35	0.001111

2.2 参考答案

知识点：第二章 PPT 中“终身寿险和两全保险”、“两全寿险的均衡保费”，位置为 PPT 80、89-90 面。

令 P 为趸缴净保费，则有：

$$\begin{aligned} P &= 10000 A_{30:\overline{3}|} = 10000 \left(A_{30:\overline{3}|}^1 + {}_3p_{30} v^3 \right) \\ &= 10000 \times \left(\sum_{k=0}^2 {}_k|q_{30} v^{k+1} + {}_3p_{30} v^3 \right) \\ &= 9423.69 \end{aligned}$$

再令 $P_{30:\overline{3}|}$ 为 3 年期缴费的年缴净保费，则有：

$$\begin{aligned} P_{30:\overline{3}|} &= \frac{A_{30:\overline{3}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{3}|}} \\ &= \frac{9423.69}{\sum_{k=0}^2 {}_t p_{30} v^k} \\ &= 3206.21 \end{aligned}$$

2.3 赋分及批改情况

表 3: Question 2 给分标准 (共 15 分)

采分点	分值
趸缴净保费	10
年缴净保费	5

本题完成的情况很好。部分同学在 $\ddot{a}_{30:\overline{3}|}$ 的计算中没有考虑到生存概率，从而导致错误。

3 连续给付型保险定价及分位数保费 Insurance Paid Immediately

3.1 原题

设 (x) 投保终身寿险，保险金额 1 元，签单时其未来寿命 T 的概率密度函数为：

$$f_T(t) = \begin{cases} 1/60 & 0 < t < 60 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

利息强度为 $\delta = 0.06$ ，在签单时的保险金给付现值随机变量为 Z ，试计算：

- \bar{A}_x ；
- 满足 $P(Z \leq \xi_{0.95}) = 0.95$ 的 $\xi_{0.95}$ 。

3.2 参考答案

知识点：第二章 PPT 中“寿险的精算现值：连续模型”一节，位置为 PPT 60-66 面。

$$1. \bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t f_T(t) dt = \int_0^{60} e^{-\delta t} \frac{1}{60} dt = \frac{1 - e^{-3.6}}{3.6} = 0.2702$$

2. 对概率进行如下转换：

$$P(Z \leq \xi_{0.95}) = P(v^T \leq \xi_{0.95}) = P\left(T \geq \frac{\ln \xi_{0.95}}{\ln v}\right)$$

$$\text{令 } h = \frac{\ln \xi_{0.95}}{\ln v}, \text{ 则 } P(T \geq h) = \int_h^{\infty} f_T(t) dt = \int_h^{60} \frac{1}{60} dt = 1 - \frac{h}{60} = 0.95,$$

得 $\frac{\ln \xi_{0.95}}{\ln v} = 3 \Rightarrow \xi_{0.95} = e^{-0.18} = 0.8353$

3.3 赋分及批改情况

表 4: Question 3 给分标准 (共 15 分)

采分点	分值
第 1 问	5
第 2 问	10

本题全班几乎全对。

4 连续给付型保险及中心极限定理 Insurance Paid Immediately and CLT

4.1 原题

假设 (x) 投保了保险金额 1 元的终身寿险, 余命 T 的概率密度是 $f_T(t) = \mu e^{-\mu t}, \mu = 0.04, t \geq 0$ 。给定利息强度 $\delta = 0.06$ 。

1. 求该保单的趸缴净保费 \bar{A}_x ;
2. 满足 $P(Z \leq \xi_{0.95}) = 0.95$ 的 $\xi_{0.95}$;
3. 假设有 1000 个相互独立的 (x) 投保了该保险, 试计算该保险基金在最初 (即 $t = 0$) 时的数额至少为多少时, 才能保证该基金足以支付所有投保人死亡给付的概率达到 95%。

4.2 参考答案

知识点: 第二章 PPT 中“例题: 对保费的理解”一节, 位置为 PPT 67-70 面。

1. $\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t f_T(t) dt = \frac{\mu}{\mu + \delta} = 0.4$;

2. $P(z \leq \xi_{0.95}) = P(v^t \leq \xi_{0.95}) = P\left(T \geq \frac{\ln \xi_{0.95}}{\ln v}\right)$

记 $h = \frac{\ln \xi_{0.95}}{\ln v}$,

$$P(T \geq h) = \int_h^{\infty} f_T(t) dt = \int_h^{\infty} \mu e^{-\mu t} dt = e^{-\mu h} = 0.95$$

得 $\xi_{0.95} = 0.9259$ 。

3. 记 Z_i 为被保险人的死亡给付现值, 则基金死亡给付为 $Z = \sum_{i=1}^{1000} Z_i$, 由于各个被保险人互相独立, 有:

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{1000} E(Z_i) = 1000 \times 0.4 = 400$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{1000} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{1000} \text{Var}(Z_i) = 1000 \times [E(Z^2) - E^2(Z)] \\ &= 1000 \times \left[\frac{\mu}{\mu + 2\delta} - \left(\frac{\mu}{\mu + \delta}\right)^2\right] = 90 \end{aligned}$$

记基金原始数额为 γ , 则

$$P(Z \leq \gamma) = P\left(\frac{Z - 400}{\sqrt{90}} \leq \frac{\gamma - 400}{\sqrt{90}}\right) = 0.95$$
$$\Rightarrow \frac{\gamma - 400}{\sqrt{90}} = 1.645 \quad \gamma = 415.61$$

保险基金在最初至少为 415.61 元才能符合要求。

4.3 赋分及批改情况

表 5: Question 4 给分标准 (共 25 分)

采分点	分值
第 1 问	5
第 2 问	8
第 3 问	12

本题完成情况很好。

5 赔付现值随机变量的均值与方差 $E(\cdot)$ and $\text{Var}(\cdot)$ of Present Value RVs

5.1 原题

假设 x 岁的被保险人死力为 μ , 利息强度为 δ 。(年龄上限为正无穷)

1. 记 Z_1 为单位终身寿险 (即保险金额为 1 元) 的赔付现值, 计算 $E(Z_1)$ 和 $\text{Var}(Z_1)$;
2. 记 Z_2 为单位 5 年期定期寿险的赔付现值, 计算 $E(Z_2)$ 和 $\text{Var}(Z_2)$ 。

5.2 参考答案

1. 对于终身寿险, 有:

$$E(Z_1) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\mu + \delta}$$

$$E[Z_1^2] = \frac{\mu}{\mu + 2\delta}$$

$$\text{Var}(Z_1) = E(Z_1^2) - [E(Z_1)]^2 = \frac{\mu}{\mu + 2\delta} - \left(\frac{\mu}{\mu + \delta}\right)^2$$

2. 对于定期寿险, 有:

$$E(Z_2) = \int_0^5 e^{-\delta t} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\mu + \delta} [1 - e^{-5(\mu + \delta)}]$$

$$E(Z_2^2) = \frac{\mu}{\mu + 2\delta} [1 - e^{-5(\mu + 2\delta)}]$$

$$\text{Var}(Z_2) = \frac{\mu}{\mu + 2\delta} [1 - e^{-5(\mu + 2\delta)}] - \left\{ \frac{\mu}{\mu + \delta} [1 - e^{-5(\mu + \delta)}] \right\}^2$$

5.3 赋分及批改情况

表 6: Question 5 给分标准 (共 15 分)

采分点	分值
第 1 题	6
第 2 题	9

本题完成情况较差，很多同学没有化简式子。

6 生存保险的现值 PV of Pure Endowment Insurance

6.1 原题

现有保险公司提供的一个退休计划：参与者如果存活至 65 岁，可以在 65 岁时一次性领取 100 万元。假设一个 50 岁的人参与了该计划，他的死力 μ 为常数 0.005。利息强度 δ 为 0.05。试计算该计划对于他的期望现值。

6.2 参考答案

该期望现值为：

$$100 \cdot e^{-15\delta} {}_{15}p_{50} = 100 \cdot e^{-15\delta} e^{-\int_0^{15} \mu dt} = 100e^{-15(\mu+\delta)} = 43.82(\text{万元})$$

6.3 赋分及批改情况

本题分值 5 分，完成情况很差。部分同学把本题想得太过复杂。