Fluctuations of Maxima

Modelling Extremal Events: Chap 3

庄源

2024 年 5 月 7 日

南开大学精算学系

目录 i

目录 ii

章节框架介绍与示例

章节结构

- 主题：研究最大值的极限分布
- 3.1：累积分布函数 F 在满足什么条件时，能使这个极限分布存在？退一步讲，能否使中心化和标准化后的 M_n 依分布收敛于某个分布？
- 3.2：如果真的能收敛于一个简单的分布（不是 0 或 1 那样的常数），那么这个分布是什么？
- 3.3：我怎样知道，对于给定的 F，它会收敛于极值分布中的哪一个？与中心极限定理相似，仿射变换的参数序列 c_n 和 d_n 到底是什么？
- 3.4：能否把三种极值分布归为一类？这些分布又跟广义帕累托分布（GPD）有什么关系？
- 3.5：有没有比依分布收敛更强的结论？（如几乎处处收敛）

凡例

定义、命题、定理、引理或推论

公式、定理编号均与原书相同。

图片的源代码均可在个人主页上找到。

评论

对应原书 Remark 部分。

例题

本章例题较多。

3.1 Limit Probabilities for Maxima

最大值随机变量的累积分布函数

- $X,\ X_1,\ X_2,\ \dots$ 为 iid、非退化的随机变量，累积分布函数为 F；
- 定义样本最大值 M_n：

$$M_1 = X_1, \quad M_n = \max\left(X_1, \dots, X_n\right), \quad n \geq 2$$

- 对于 iid 的 $X_1,\ X_2,\ \dots$，有：

$$\begin{aligned} P\left(M_n \leq x\right) &= P\left(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x\right) \\ &\overset{\text{iid}}{=} P\left(X_1 \leq x\right) \times \dots \times P\left(X_n \leq x\right) = F^n(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

最大值随机变量的收敛性

- 定义 x_F 为 F 的右端点，即 $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$；
- 若 $x < x_F$：

$$P\left(M_n \leq x\right) = F^n(x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

- 若 $x_F \leq \infty$，$x \geqslant x_F$：

$$P\left(M_n \leq x\right) = F^n(x) = 1$$

- M_n 是 n 的单调不减函数，则可以印证一个直觉性的结论：

$$M_n \xrightarrow{\text{a.s.}} x_F, \quad n \rightarrow \infty \tag{3.1}$$

寻找仿射变换下的收敛

- 是否存在两列数 $c_n > 0$，$d_n \in \mathbb{R}$，使得

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H, \quad n \to \infty \tag{3.2}$$

- 下式中，$u_n = c_n x + d_n$：

$$\begin{aligned} H(x) &= \mathrm{P}\left(c_n^{-1}(M_n - d_n) \le x\right) \\ &= \mathrm{P}(M_n \le c_n x + d_n) = \mathrm{P}(M_n \le u_n) \end{aligned} \tag{3.3}$$

- F 满足什么性质时，$\mathrm{P}(M_n \le u_n)$ 能够有收敛性，并不要收敛于一个简单的数？

泊松近似

Proposition 3.1.1 (Poisson Approximation)

对于给定 $\tau \in [0, \infty]$ 和一列实数 (u_n)，下面两式等价：

$$n\bar{F}\left(u_n\right) \rightarrow \tau, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{P}\left(M_n \leq u_n\right) \rightarrow e^{-\tau}. \tag{3.5}$$

Page 116，证明见讲义

泊松近似（cont'd）

Remark：泊松近似的来源

在 $0 \leq \tau < \infty$ 时，令

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} I_{\{X_i > u_n\}} \sim B\left(n, \bar{F}\left(u_n\right)\right)$$

则

$$B_n \xrightarrow{d} \mathrm{Poi}(\tau) \iff \mathrm{E}(B_n) = n\bar{F}\left(u_n\right) \to \tau$$

于是有：

$$P\left(M_n \leq u_n\right) = \mathrm{P}\left(B_n = 0\right) \to \exp\{-\tau\}$$

在何时，$\mathrm{P}(M_n \leq u_n)$ 会收敛于简单的 0 或 1

Corollary 3.1.2

假设 $x_F < \infty$ 且

$$\bar{F}(x_F-) = F(x_F) - F(x_F-) > 0.$$

那么对于任意的序列 (u_n) 都有：

$$P(M_n \leq u_n) \to \rho,$$

要么 $\rho = 0$，要么 $\rho = 1$。

在何时，$\mathrm{P}(M_n \leq u_n)$ 会收敛于简单的 0 或 1（cont'd）

Corollary 3.1.2

如果一个分布在很接近右端点（右端点有限大）处仍有跳，M_n 的非退化极限分布不存在。

无穷大右端点下的收敛条件

Theorem 3.1.3

令 F 为具有右端点 $x_F \leq \infty$ 的累积分布函数，再令 $\tau \in (0, \infty)$。存在满足 $n\bar{F}(u_n) \to \tau$ 的序列 (u_n)，当且仅当

$$\lim_{x \uparrow x_F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-)} = 1 \tag{3.6}$$

当 F 为离散型分布时，$\bar{F}(x-) = \bar{F}(x-1)$。

几个无穷大右端点下离散分布的例子

Example 3.1.4–3.1.6

对于 Poisson 分布、几何分布和负二项分布，证明式 3.6 并不成立：

$$\lim_{x \uparrow x_F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-)} = 1 \tag{3.6}$$

3.2 Weak Convergence of Maxima Under Affine Transformations

收敛到的分布是什么?

Definition 3.2.1 最大稳定分布

如果对于 iid 的 $X, X_1, \ldots, X_n$，有合适的序列 $c_n > 0$，$d_n \in \mathbb{R}$ 和每个 $n > 2$，都有:

$$\max(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} c_n X + d_n \tag{3.7}$$

则称一个非退化的随机变量 X（对应的分布或累积分布函数）是最大稳定的。则有:

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \stackrel{d}{=} X \tag{3.8}$$

最大稳定分布和最大值极限分布的关系

Theorem 3.2.2 最大稳定分布和最大值极限分布的关系

最大稳定分布刚好就是任意可能的独立同分布随机变量最大值（经过中心化标准化）的极限分布。

证明方式：两种分布是“同一种”、“同一类”。

Page 121，证明见讲义

同分布（same distribution）和同类（same type）

定义

同分布（same distribution）为：

$$X \overset{d}{=} Y$$

同类（same type）为，存在 $a \in \mathbb{R}$ 和 $b > 0$，有：

$$X \overset{d}{=} bY + a$$

向某类型收敛（Convergence to Types）

Theorem A1.5：Convergence to Types Theorem

令 $A, B, A_1, A_2, \ldots$ 为随机变量，$b_n > 0, \beta_n > 0, a_n, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 为常数，假设 $b_n^{-1}(A_n - a_n) \xrightarrow{d} A$，那么下面的关系：

$$\beta_n^{-1}(A_n - \alpha_n) \xrightarrow{d} B \tag{A.2}$$

成立，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} b_n/\beta_n = b \in [0, \infty), \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - \alpha_n)/\beta_n = a \in \mathbb{R}. \tag{A.3}$$

如果 (A.2) 成立，那么 $B \stackrel{d}{=} bA + a$，且 a, b 是唯一能让关系成立的常数。

向某类型收敛（Convergence to Types, cont'd）

Theorem A1.5：Convergence to Types Theorem

令 $A, B, A_1, A_2, \ldots$ 为随机变量，$b_n > 0, \beta_n > 0, a_n, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 为常数，假设 $b_n^{-1}(A_n - a_n) \xrightarrow{d} A$，那么下面的关系：

$$\beta_n^{-1}(A_n - \alpha_n) \xrightarrow{d} B \tag{A.2}$$

成立，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} b_n/\beta_n = b \in [0, \infty), \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - \alpha_n)/\beta_n = a \in \mathbb{R}. \tag{A.3}$$

当 (A.2) 成立，A 非退化当且仅当 $b > 0$，A 和 B 属于同一类。

非高斯领域的中心极限定理：Fisher-Tippett theorem

Theorem 3.2.3: Fisher-Tippett theorem

让 (X_n) 是独立同分布随机变量序列。如果存在规范化参数 $c_n > 0$，$d_n \in \mathbb{R}$ 和一些非退化的累积分布函数 H 使得

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H, \tag{3.9}$$

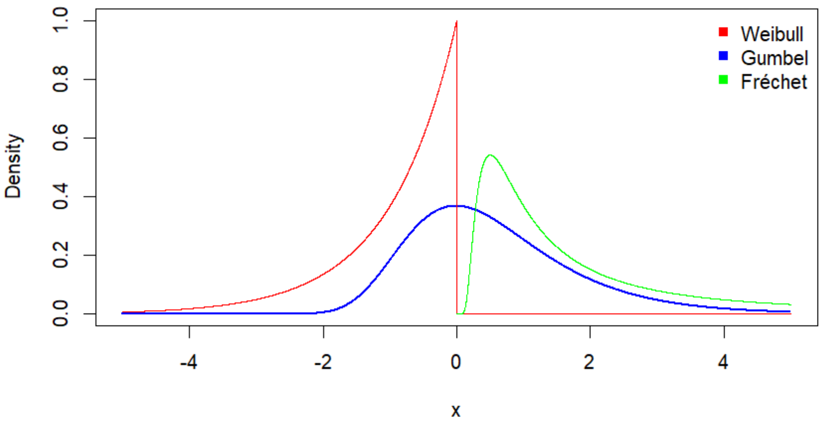
那么 H 属于以下三种分布的其中一种：

$$\text{Fréchet:}\quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, x > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0.$$

$$\text{Weibull:}\quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\}, x \le 0 \\ 1, x > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0.$$

$$\text{Gumbel:}\quad \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fisher-Tippett 定理中的三种分布



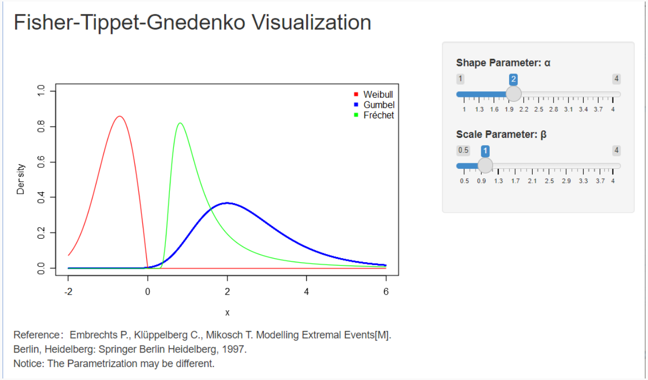
Page 122，Fig 3.2.4，Fréchet 和 Weibull 分布的 α 都选为 1。

Fisher-Tippett 定理的可视化

相关 R 代码

```
library(shiny)

runUrl("https://yuanzhuang.xyz/uploads/EVT/FTG.zip")
```



Fisher-Tippett theorem 的证明思路

对于所有 $t>0$，有:

$$F^{[nt]}\left(c_{[nt]}x+d_{[nt]}\right)\to H(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

也有:

$$F^{[nt]}\left(c_nx+d_n\right)=\left(F^n\left(c_nx+d_n\right)\right)^{[nt]/n}\to H^t(x)$$

由 Covergence to types theorem，存在函数 $\gamma(t)>0,\delta(t)\in\mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{[nt]}}=\gamma(t),\quad \lim_{n\to\infty}\frac{d_n-d_{[nt]}}{c_{[nt]}}=\delta(t),\quad t>0,$$

且

$$H^t(x)=H(\gamma(t)x+\delta(t)) \tag{3.10}$$

Fisher-Tippett theorem 的证明思路（cont'd）

由

$$H^t(x) = H(\gamma(t)x + \delta(t)) \tag{3.10}$$

有

$$\gamma(st) = \gamma(s)\gamma(t), \quad \delta(st) = \gamma(t)\delta(s) + \delta(t) \tag{3.11}$$

上述函数方程有三类解。

关于 Fisher-Tippett theorem 的几点注意事项：仿射变换

- 极限定理在仿射变换下也成立，只不过需要更换规范化参数。如果：

$$\lim_{n\to\infty} P\left(c_n^{-1}\left(M_n - d_n\right) \leq x\right) = H(cx+d)$$

那么，对于 $\tilde{c}_n = c_n/c$ 和 $\tilde{d}_n = d_n - dc_n/c$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\tilde{c}_n^{-1}\left(M_n - \tilde{d}_n\right) \leq x\right) = H(x)$$

关于 Fisher-Tippett theorem 的几点注意事项：Weibull 分布的定义

- 我们学过的 Weibull 分布定义域一般在 $[0, +\infty)$ 上：

$$F_\alpha(x) = 1 - e^{-x^\alpha}, \quad x \geq 0$$

- 书中的 Weibull 分布和我们学过的 Weibull 分布可以这样转换：

$$\Psi_\alpha(x) = 1 - F_\alpha(-x), \quad x < 0$$

- 部分精算教材中将 $\Psi_\alpha(x)$ 称为“Weibull EV”，但在本书中，为了传统，还是使用 $\Psi_\alpha(x)$ 作为 Weibull 分布。

关于 Fisher-Tippett theorem 的几点注意事项：极值分布间的关系

- 虽然三种分布看起来十分不同，但它们有这样的转换关系：

$$X \text{ has df } \Phi_\alpha \iff \ln X^\alpha \text{ has df } \Lambda \iff -X^{-1} \text{ has df } \Psi_\alpha$$

Denition 3.2.6

在定理 3.2.3 中列出的 Φ_α, Ψ_α 和 Λ 叫作标准极值分布，相应的随机变量叫标准极值随机变量。Φ_α, Ψ_α 和 Λ 这一类的分布叫作极值分布，相应的随机变量叫极值随机变量。

标准极值分布的最大稳定特性

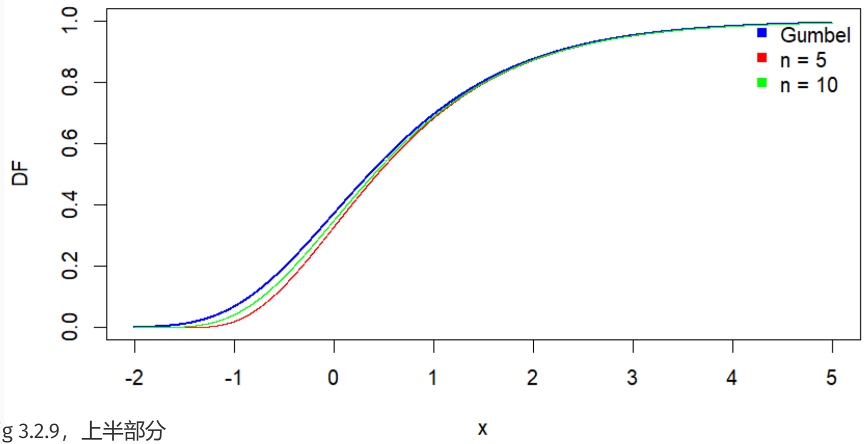
- Fréchet: $M_n \overset{d}{=} n^{1/\alpha} X$
- Weibull: $M_n \overset{d}{=} n^{-1/\alpha} X$
- Gumbel: $M_n \overset{d}{=} X + \ln n$

在不同的 F 下，各自最大值的极限分布是什么？

Example 3.2.7 指数分布最大值的极限分布

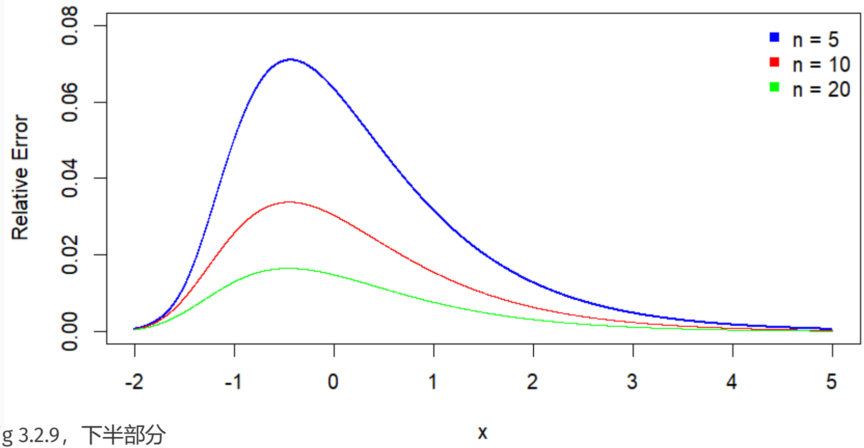
$$
\begin{aligned}
P\left(M_n - \ln n \le x\right) &= \left(P(X \le x + \ln n)\right)^n \\
&= \left(1 - n^{-1} e^{-x}\right)^n \\
&\to \exp\left\{-e^{-x}\right\} = \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

从图像查看最大值的依分布收敛特性：指数 VS Gumbel



Page 126，Fig 3.2.9，上半部分

使用 Gumbel 分布近似多个指数变量最大值的相对误差



Page 126， Fig 3.2.9，下半部分

在不同的 F 下，各自最大值的极限分布是什么？（cont'd）

Example 3.2.8 柯西分布最大值的极限分布

柯西分布的 df 为：

$$f(x)=\left(\pi\left(1+x^2\right)\right)^{-1},\quad x\in\mathbb{R}$$

所以有：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(x)}{(\pi x)^{-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\pi^{-1}x^{-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi x^2}{\pi\left(1+x^2\right)}=1$$

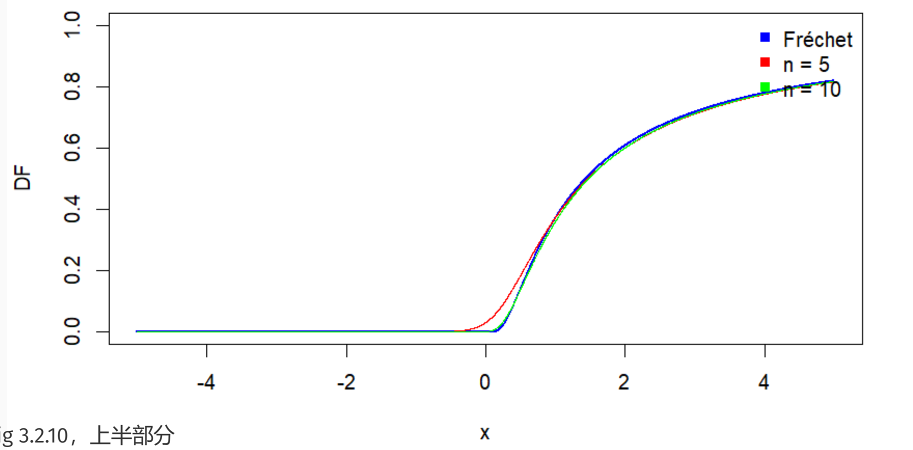
也就是 $\bar{F}(x)\sim(\pi x)^{-1}$。

在不同的 F 下，各自最大值的极限分布是什么？（cont'd）

Example 3.2.8 柯西分布最大值的极限分布

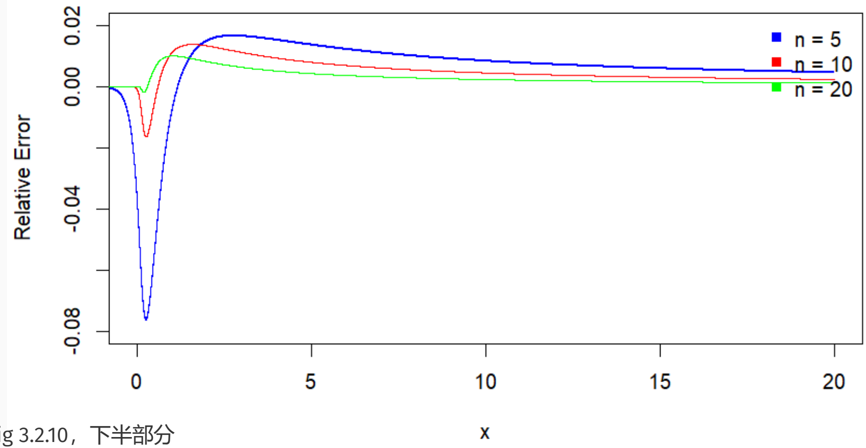
$$\begin{aligned} P\left(M_n \le \frac{nx}{\pi}\right) &= \left(1 - \bar{F}\left(\frac{nx}{\pi}\right)\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{nx} + o(1)\right)^n \\ &\to \exp\left\{-x^{-1}\right\} = \Phi_1(x), \quad x > 0 \end{aligned}$$

从图像查看最大值的依分布收敛特性：柯西 VS Fréchet



Page 127，Fig 3.2.10，上半部分

使用 Fréchet 分布近似多个柯西变量最大值的相对误差

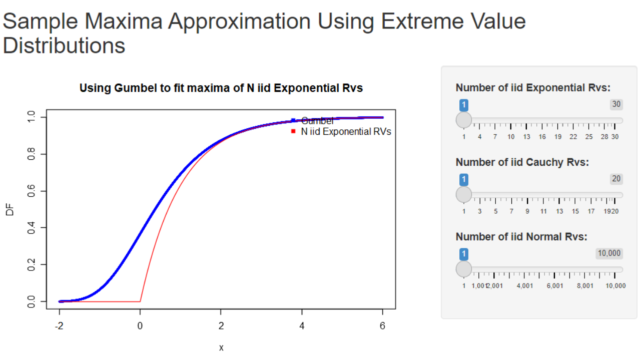


Page 127，Fig 3.2.10，下半部分

不同 N 下，最大值确切分布与极值分布的相似程度

相关 R 代码

```
library(shiny)
runUrl("https://yuanzhuang.xyz/uploads/EVT/FTGApproximation.zip")
```



3.3 Maximum Domains of Attraction and Norming Constants

动机

- c_n 和 d_n 应该怎样选取？（其实在上一节中已经告诉了我们）
- 如何很快就知道，分布 F 下最大值的极限分布是 Fréchet、Weibull 和 Gumbel 中的哪一个？（最大吸引域和冯·米塞斯条件）

最大吸引域

Definition 3.3.1

如果存在常数 $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ 满足 $c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H$，就说随机变量 X（X 的累积分布函数 F，X 的分布）属于极值分布 H 的最大吸引域。该关系可写为 $X \in \mathrm{MDA}(H)$ $(F \in \mathrm{MDA}(H))$。

上述条件也相当于在说：

$$\lim_{n\to\infty} P\left(M_n \le c_n x + d_n\right) = \lim_{n\to\infty} F^n\left(c_n x + d_n\right) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

最大吸引域的表征（后续证明最大吸引域的方式）

Proposition 3.3.2

F 属于极值分布 H 的最大吸引域，具有规范化参数 $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}\left(c_n x + d_n\right) = -\ln H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$H(x) = 0$ 时，极限视作 ∞。

其它已讨论过的基础知识

- 正则变化相关知识（附录 A3.1）
- 尾等价（Definition 3.3.3）

Definition 3.3.5：分位数函数

$$F^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}, \quad 0 < t < 1$$

定义了 F 的 t 分位数。

3.3.1 Fréchet 分布的最大吸引域

c_n 的选取：F 的 $1-1/n$ 分位数

$$
\begin{aligned}
c_n = F^{\leftarrow}\left(1-n^{-1}\right) &= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1-n^{-1}\right\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} : (1/\bar{F})(x) \geq n\} \\
&= (1/\bar{F})^{\leftarrow}(n).
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

d_n 为 0，也就是不需要中心化。

Theorem 3.3.7：Φ_α 的最大吸引域

F 属于 $\Phi_\alpha, \alpha > 0$ 的最大吸引域，当且仅当 $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$（也就是 $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$），其中 L 是某种慢变函数。

如果 $F \in \mathrm{MDA}\left(\Phi_\alpha\right)$，那么

$$c_n^{-1} M_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha, \tag{3.14}$$

其中 c_n 是 F 的 $1 - 1/n$ 分位数（即式 3.13）。

是否存在更简单、更易辨识的 $F \in \mathrm{MDA}\left(\Phi_\alpha\right)$ 条件?

Corollary 3.3.8：von Mises condition

令 F 绝对连续，具有密度函数 f，其满足

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x f(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0, \tag{3.16}$$

那么 $F \in \mathrm{MDA}\left(\Phi_\alpha\right)$。

这是一个充分条件，而不是充要条件。

最大吸引域中是否还存在其它分布?

Proposition 3.3.9：Closure property of $\mathrm{MDA}\left(\Phi_\alpha\right)$

令 F 和 G 是累积分布函数，假设 $F \in \mathrm{MDA}\left(\Phi_\alpha\right)$，其正规化参数为 $c_n > 0$，也就是说

$$\lim_{n\to\infty} F^n\left(c_n x\right) = \Phi_\alpha(x), \quad x > 0. \tag{3.17}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} G^n\left(c_n x\right) = \Phi_\alpha(cx), \quad x > 0,$$

当且仅当 F 和 G 尾等价：

$$\lim_{x\to\infty} \bar{F}(x)/\bar{G}(x) = c^\alpha.$$

Fréchet 分布最大吸引域中的分布是什么？

- 是满足 von Mises 条件的分布和与它们尾等价的分布；
- 是 $\bar{F}$ 以 $-\alpha$ 为参数正则变化的分布；
- 具体来说，是：
  1. Cauchy（Example 3.2.8）
  2. Pareto
  3. Burr
  4. Loggamma（Example 3.3.11，接下来有案例）
  5. $\alpha < 2$ 的稳定分布

寻找 Loggamma 的 c_n

Example 3.3.11: Loggamma distribution

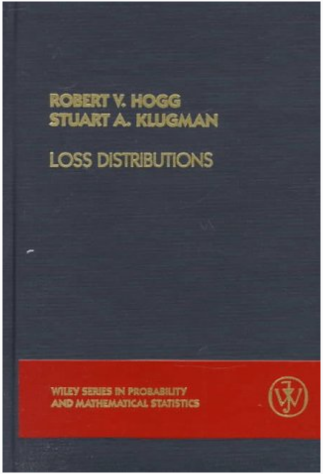
Loggamma 分布有尾：

$$\bar{F}(x) \sim \frac{\alpha^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(\ln x)^{\beta-1}x^{-\alpha}, \quad x \to \infty, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{3.18}$$

代入 c_n 是 F 的 $1 - 1/n$ 分位数，解得：

$$c_n \sim \left((\Gamma(\beta))^{-1}(\ln n)^{\beta-1}n\right)^{1/\alpha}$$

Loggamma 分布的尾部行为来自于其密度函数



VI. LOGGAMMA DISTRIBUTION

Support: $x > 1$

Parameters: $\alpha > 0,\ \lambda > 0$

D.f.: $F(x) = \Gamma(\alpha;\lambda \ln x)$

P.d.f.: $f(x) = \dfrac{\lambda^{\alpha}(\ln x)^{\alpha-1}}{x^{\lambda+1}\Gamma(\alpha)}$

Moments: $E[X^n] = \left(1-\dfrac{n}{\lambda}\right)^{-\alpha},\ \lambda > n$

Mode: $1,\ \alpha \le 1; \quad \exp\left(\dfrac{\alpha-1}{\lambda+1}\right),\ \alpha > 1$

参考资料：Hogg, R. V. and Klugman, S. A. (1984), *Loss Distributions*, Wiley.

3.3.2 Weibull 分布的最大吸引域

Recall：Weibull 和 Fréchet 分布的关系

- X has df $\Phi_\alpha \Longleftrightarrow -X^{-1}$ has df Ψ_α
- 可以预料到 Weibull 最大吸引域的条件和 Fréchet 非常相似，可能只需要做变量变化
- 不同之处：在 Weibull 最大吸引域中的分布 F 都有有限的右端点 x_F

c_n 和 d_n 的选取

- $c_n = x_F - F^{\leftarrow}\left(1 - n^{-1}\right)$
- $d_n = x_F$
- c_n 即是 F 的 $1 - 1/n$ 分位数到右端点的距离
- d_n 即是右端点 x_F

Theorem 3.3.12：Ψ_α 的最大吸引域

F 属于 $\Psi_\alpha, \alpha > 0$ 的最大吸引域，当且仅当 $x_F < \infty$ 且 $\bar{F}(x_F - x^{-1}) = x^{-\alpha} L(x)$（也就是 $\bar{F}(x_F - x^{-1}) \in \mathcal{R}_{-\alpha}$），其中 L 是某种慢变函数。

如果 $F \in \mathrm{MDA}\left(\Psi_\alpha\right)$，那么

$$c_n^{-1}(M_n - x_F) \xrightarrow{d} \Phi_\alpha, \tag{3.20}$$

其中 c_n、d_n 分别为：F 的 $1 - 1/n$ 分位数到右端点的距离和右端点 x_F。

Weibull 最大吸引域的 von Mises 条件以及 $\mathrm{MDA}(\Psi_\alpha)$ 的封闭性

- Weibull 的 von Mises 条件仅与 Frechet 的略有不同，不同之处来源于变量变换（Corollary 3.3.13）:

$$\lim_{x \uparrow x_F} \frac{(x_F - x)\, f(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0 \tag{3.23}$$

- $\mathrm{MDA}(\Psi_\alpha)$ 在尾等价下封闭（Proposition 3.3.14）。也即：$\mathrm{MDA}(\Psi_\alpha)$ 中包含满足 von Mises 条件的分布，还有与这些分布尾等价的分布。

Weibull 最大吸引域中的具体分布

分布名称	密度函数或生存函数	$\mathbf{c_n}$	$\mathbf{d_n}$
均匀分布	$f(x)=1, 0<x<1$	n^{-1}	1
Power law at x_F	$\bar{F}(x)=K\left(x_F-x\right)^{\alpha}$	$(Kn)^{-1/\alpha}$	x_F
Beta 分布	$f(x)=\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$\left(n\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}\right)^{-1/b}$	1

三个分布分别对应 Example 3.3.15、Example 3.3.16、Example 3.3.17。

Karamata Theorem：对慢变函数的积分

Theorem A3.6：Karamata 定理

令 $L \in \mathcal{R}_0$ 在 $[x_0, \infty)$ 上局部有界，$x_0 \geq 0$。那么：

(a）对于 $\alpha > -1$，

$$\int_{x_0}^{x} t^{\alpha} L(t) dt \sim (\alpha + 1)^{-1} x^{\alpha+1} L(x), \quad x \to \infty,$$

(b）对于 $\alpha < -1$，

$$\int_{x}^{\infty} t^{\alpha} L(t) dt \sim -(\alpha + 1)^{-1} x^{\alpha+1} L(x), \quad x \to \infty.$$

Page 567，Jovan Karamata（1902-1967），塞尔维亚数学家

Karamata Theorem：积分项中含正则变化项的积分

Theorem 12 (Karamata's theorem, direct part). *Let $f \in \mathcal{RV}_\rho$ be locally bounded on $[a, \infty)$. Then*

(i) for $\sigma \geq -(\rho+1)$

$$\frac{x^{\sigma+1} f(x)}{\int_a^x t^\sigma f(t) \mathrm{d}t} \to \sigma + \rho + 1;$$

(ii) for $\sigma < -(\rho+1)$

$$\frac{x^{\sigma+1} f(x)}{\int_x^\infty t^\sigma f(t) \mathrm{d}t} \to -(\sigma + \rho + 1).$$

(The latter also holds for $\sigma = -(\rho+1)$ if the integral is finite.)

It turns out that this behavior also characterizes regular variation.

参考资料：Kevei, P (2019), Regularly varying functions [Download]

Beta 在 Weibull 分布最大吸引域中

Example 3.3.17： Beta distribution

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1, \quad a, b > 0$$

Page 137，解答见讲义

3.3.3 Gumbel 分布的最大吸引域

Gumbel 最大吸引域与 Fréchet 和 Weibull 分布的不同

- Gumbel 最大吸引域和正则变化没有直接联系
- 很多重尾和轻尾分布都在 Gumbel 分布的最大吸引域中
- Gumbel 分布最大吸引域中的分布有些有无限的右端点 $x_F = \infty$，有些只有有限的右端点（$x_F < \infty$）

Definition 3.3.18: von Mises function

令 F 为累积分布函数，右端点为 $x_F \leq \infty$。假设存在 $z < x_F$ 使 F 有如下表示：

$$\bar{F}(x) = c\exp\left\{-\int_z^x \frac{1}{a(t)}dt\right\}, \quad z < x < x_F, \tag{3.24}$$

其中 c 是某个正数，$a(\cdot)$ 是正且一致连续的函数，导数 a' 存在，且 $\lim_{x\uparrow x_F} a'(x) = 0$。那么 F 叫作 von Mises 函数，函数 $a(\cdot)$ 被称为 F 的辅助函数。

很多常见分布函数的生存函数都是 von Mise 函数

- 指数分布（Example 3.3.19）
- Weibull 分布（Example 3.3.20）
- Erlang 分布（Example 3.3.21）
- 有限右端点下的指数行为（Example 3.3.22）
- 右端点下的可导性（Example 3.3.23）

Page 139，证明见讲义

von Mise 函数的特点

Proposition 3.3.24: Properties of von Mises functions

每个 von Mises 函数 F 在 (z, x_F) 上都绝对连续，密度函数 f 为正。辅助函数可以选为 $a(x) = \bar{F}(x)/f(x)$。另外，下面的特点都成立：

(a) 如果 $x_F = \infty$，那么 $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\infty}$ 且

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x f(x)}{\bar{F}(x)} = \infty. \tag{3.26}$$

(b) 如果 $x_F < \infty$，那么 $\bar{F}\left(x_F - x^{-1}\right) \in \mathcal{R}_{-\infty}$ 且

$$\lim_{x \uparrow x_F} \frac{\left(x_F - x\right) f(x)}{\bar{F}(x)} = \infty. \tag{3.27}$$

Page 140，证明见讲义

Definition A3.11: Rapid Variation

一个在 $(0,\infty)$ 上正的，勒贝格可测的函数 h 是快速变化的，参数为 $-\infty$ (写为 $h \in \mathcal{R}_{-\infty}$)，如果：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t > 1, \\ \infty & \text{if} \quad 0 < t < 1. \end{cases}$$

正则变化函数与快变函数的表示定理

Theorem A3.12(b): Properties of functions of rapid variation

如果 $h \in \mathcal{R}_{-\infty}$，那么存在函数 c 和 δ，满足 $c(x) \to c_0 \in (0, \infty)$；$\delta(x) \to -\infty, x \to \infty$。且对于某些 $z > 0$，

$$h(x) = c(x) \exp\left\{\int_z^x \frac{\delta(u)}{u} du\right\}, \quad x \geq z. \tag{A.14}$$

反之亦然。

正则变化函数与快变函数的表示定理（cont'd）

Theorem A3.3: Representation theorem for regularly varying functions

如果 $h \in \mathcal{R}_{-\infty}$，那么存在函数 c 和 δ，满足 $c(x) \to c_0 \in (0, \infty)$；$\delta(x) \to \alpha, x \to \infty$。且对于某些 $z > 0$，

$$h(x) = c(x) \exp\left\{\int_z^x \frac{\delta(u)}{u} du\right\}, \quad x \geq z. \tag{A.12}$$

反之亦然。

Gumbel 最大吸引域的 von Mises 条件

Proposition 3.3.29: von Mises functions and $\mathrm{MDA}(\Lambda)$

假设 F 是 von Mises 函数，那么 $F \in \mathrm{MDA}(\Lambda)$。正规化参数为：

$$d_n = F^{\leftarrow}\left(1 - n^{-1}\right) \quad \text{and} \quad c_n = a\left(d_n\right),$$

其中 a 是 F 的辅助函数。

Gumbel 最大吸引域的充要条件

Theorem 3.3.26: Characterisation I of $\mathrm{MDA}(\Lambda)$

F 属于 Λ 的最大吸引域，当且仅当有 $z < x_F$ 使 F 有表示：

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp\left\{ - \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < x_F, \tag{3.33}$$

c 和 g 是可测函数，满足 $c(x) \to c > 0, g(x) \to 1, x \uparrow x_F$，$a(x)$ 是正的、绝对连续的函数。其密度 $a'(x)$ 有 $\lim_{x \uparrow x_F} a'(x) = 0$。

Remark：Gumbel 最大吸引域的充要条件

- 定理 3.3.26 中，$d_n = F^{\leftarrow}\left(1 - n^{-1}\right), c_n = a\left(d_n\right)$；
- $a(x)$ 的其中的一个选取为：

$$\int_x^{x_F} \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(x)} dt \tag{3.24}$$

  这其实就是 $E(X - x \mid X > x)$。(mean excess)
- 很多种表示其实都可接受，如：$\bar{F}(x) = c(x) \exp\left\{-\int_z^x \frac{1}{a(t)} dt\right\}$，这本质上来源于 c 和 g 之间的权衡。

Gumbel 最大吸引域的另一种充要条件

Theor 3.3.27: Characterisation II of $\mathrm{MDA}(\Lambda)$

累积分布函数 F 属于 Λ 的最大吸引域，当且仅当存在正函数 $\tilde{a}$ 使下列等式满足：

$$\lim_{x \uparrow x_F} \frac{\bar{F}(x + t\tilde{a}(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-t} \tag{3.36}$$

可能的 $\tilde{a} = a$ 如式（3.34）所示。

Gumbel 分布最大吸引域中的分布是什么？

- $\mathrm{MDA}(\Lambda_\alpha)$ 在尾等价下封闭（Proposition 3.3.28）。
- 是生存函数为 von Mises 函数的分布和与它们尾等价的分布；
- 具体来说，是：
  1. 指数分布
  2. Gamma 分布
  3. 正态分布
  4. 对数正态分布
  5. 尾部的指数行为（$\bar{F}(x) = K \exp\left\{-\frac{\alpha}{x_F - x}\right\}, \quad x < x_F, \quad \alpha, K > 0$）
  6. Benktander-type-I 和 Benktander-type-II 分布

使用 Gumbel 近似 iid 正态分布的最大值

Example 3.3.29 Normal distribution

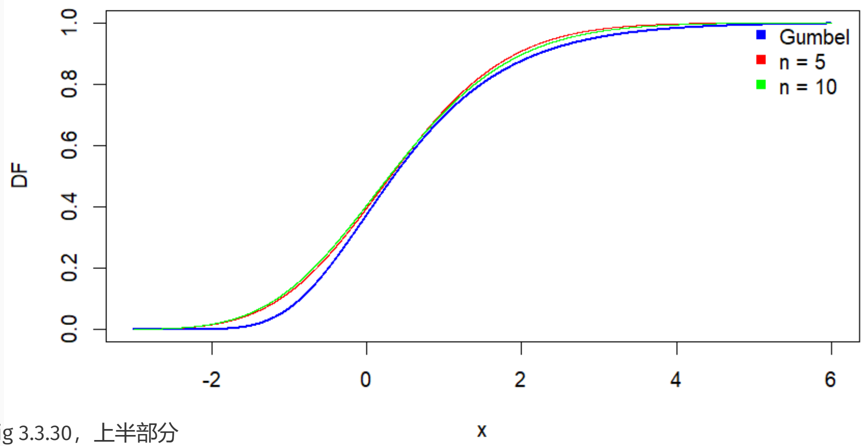
$$d_n = (2\ln n)^{1/2} - \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2(2\ln n)^{1/2}} + o\left((\ln n)^{-1/2}\right)$$

$$c_n = a(d_n) \sim (2\ln n)^{-1/2}$$

有：

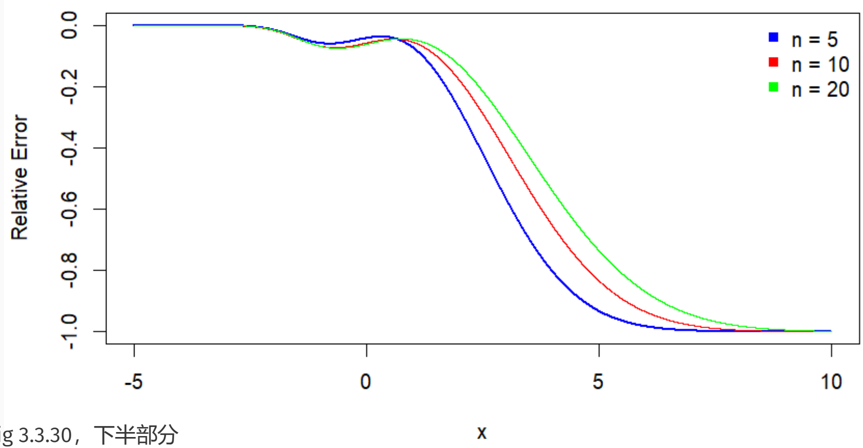
$$\sqrt{2\ln n}\left(M_n - \sqrt{2\ln n} + \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2(2\ln n)^{1/2}}\right) \xrightarrow{d} \Lambda \tag{3.40}$$

从图像查看最大值的依分布收敛特性：正态 VS Gumbel



Page 146，Fig 3.3.30，上半部分

使用 Gumbel 分布近似多个正态变量最大值的相对误差



Page 146，Fig 3.3.30，下半部分

矩的存在性

Corollary 3.3.32: Existence of moments

X 有 $F \in \mathrm{MDA}(\Lambda)$，具有有限右端点。那么 $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\infty}$。特别地，$E\left(X^{+}\right)^{\alpha} < \infty$ 存在。$\alpha > 0$，其中 $X^{+} = \max(0, X)$。

3.4 The Generalised Extreme Value Distribution and the Generalised Pareto Distribution

动机

- 将三种极值分布归为一类（GEV）
- 寻找 mean excess 的极限分布（GPD）

极值分布的 Jenkinson-von Mises 表示

Definition 3.4.1: The generalised extreme value distribution (GEV)

定义如下累积分布函数:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left\{-(1+\xi x)^{-1/\xi}\right\} & \text{if } \xi \neq 0 \\ \exp\{-\exp\{-x\}\} & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

其中 $1 + \xi x > 0$。

Remark: GEV

- 定义域:

$$
\begin{array}{lll}
x > -\xi^{-1} & \text{for} & \xi = \alpha^{-1} > 0 \ \cdots \ \text{Fréchet} \\
x < -\xi^{-1} & \text{for} & \xi = -\alpha^{-1} < 0 \ \cdots \ \text{Weibull} \\
x \in \mathbb{R} & \text{for} & \xi = 0 \ \cdots \ \text{Gumbel}
\end{array}
$$

- 也把经过平移或放缩的后的随机变量 $H_{\xi;\mu,\psi}$ 称为 GEV: $(x-\mu)/\psi,\ \mu \in \mathbb{R},\ \psi > 0$

Theorem 3.4.5: Characterisation of MDA(H_ξ)

对于 $\xi \in \mathbb{R}$，下列命题等价：(a) $F \in \mathrm{MDA}\left(H_\xi\right)$

(b) 存在一个正的、可测函数 $a(\cdot)$，对于 $1+\xi x>0$，有：

$$\lim_{u \uparrow x_F} \frac{\bar{F}(u+x a(u))}{\bar{F}(u)}=\begin{cases}(1+\xi x)^{-1/\xi} & \text{if } \xi \neq 0, \\ e^{-x} & \text{if } \xi=0.\end{cases} \tag{3.42}$$

(c) 对于 x，$y>0$，$y \neq 1$，令 $U(t)=F^{\leftarrow}\left(1-t^{-1}\right)$， $t>0$，有：

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U(s x)-U(s)}{U(s y)-U(s)}=\begin{cases}\frac{x^{\xi}-1}{y^{\xi}-1} & \text{if } \xi \neq 0 \\ \frac{\ln x}{\ln y} & \text{if } \xi=0\end{cases} \tag{3.43}$$

Remarks: MDA(H_ξ) 的表征

- 式（3.42）还可被表示为如下 mean excess 的形式：

$$\lim_{u \uparrow x_F} P\left(\frac{X-u}{a(u)} > x \,\middle|\, X > u\right) = \begin{cases} (1+\xi x)^{-1/\xi} & \text{if } \xi \neq 0 \\ e^{-x} & \text{if } \xi = 0 \end{cases} \tag{3.45}$$

Definition 3.4.6: Excess distribution function, mean excess function

令 X 为随机变量，累积分布函数为 F，右端点为 x_F。对于 $u < x_F$，

$$F_u(x) = P(X - u \leq x \mid X > u), \quad x \geq 0, \tag{3.47}$$

为超过限额 u 的条件分布函数。Mean excess function 则为：

$$e(u) = E(X - u \mid X > u)$$

Mean Excess 的极限：广义帕累托分布

Definition 3.4.9: The generalised Pareto distribution（GPD）

定义累积分布函数 G_ξ：

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 1-(1+\xi x)^{-1/\xi} & \text{if} \quad \xi \neq 0, \\ 1-e^{-x} & \text{if } \xi = 0, \end{cases} \tag{3.50}$$

其中，

$$\begin{aligned} x \geq 0 \qquad & \text{if} \quad \xi \geq 0, \\ 0 \leq x \leq -1/\xi \quad & \text{if} \quad \xi < 0. \end{aligned}$$

G_ξ 被称为标准广义帕累托分布（GPD）。

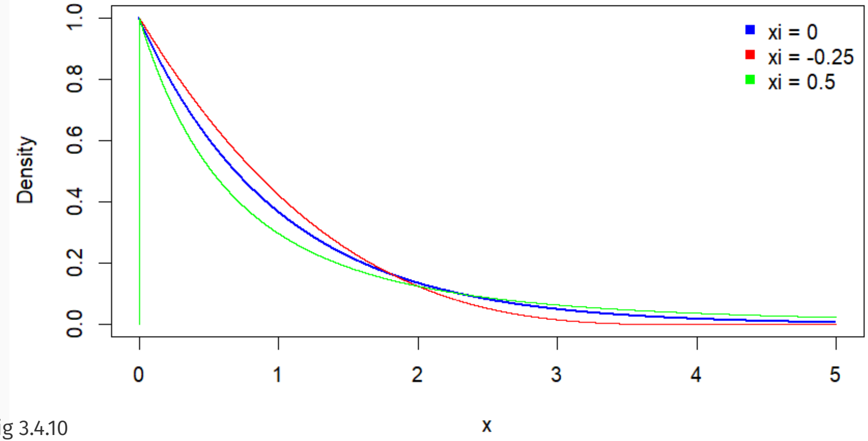
Remarks：广义帕累托分布

- $G_{\xi;\nu,\beta}$，也就是 $(x-\nu)/\beta$，是标准广义帕累托分布平移、放缩后的结果，同样也被称为 GPD
- $G_{\xi;0,\beta}$，即不平移，只放缩的分布十分重要，即：

$$G_{\xi,\beta}(x) = 1 - \left(1 + \xi\frac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \quad x \in D(\xi,\beta) \tag{3.51}$$

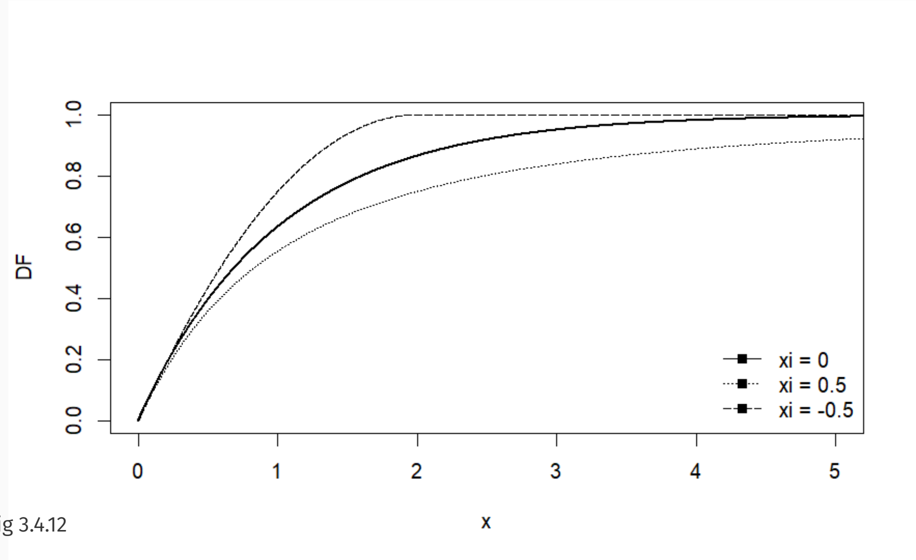
$$x \in D(\xi,\beta) = \begin{cases} [0,\infty) & \text{if} \quad \xi \geq 0 \\ [0, -\beta/\xi] & \text{if} \quad \xi < 0 \end{cases}$$

不同 ξ 下 GPD 的密度函数（ξ 越大，尾越厚）



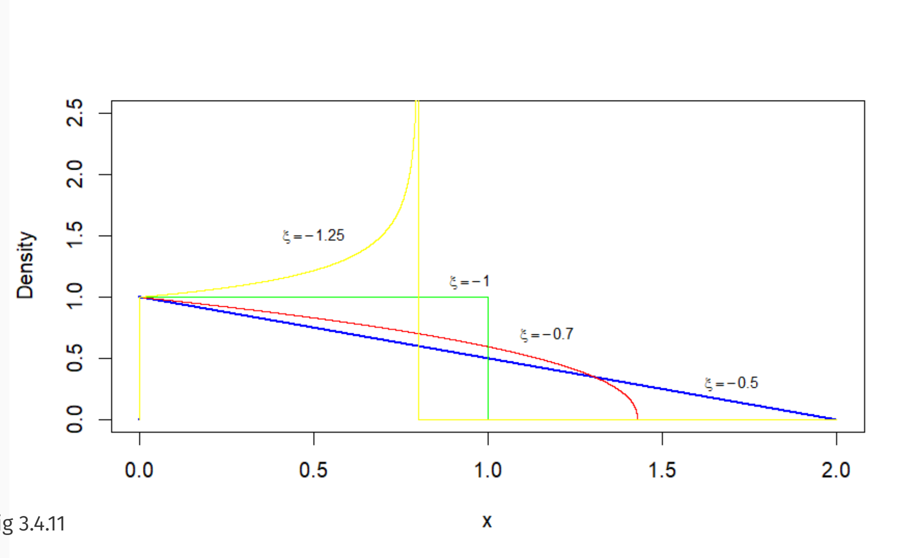
Page 163， Fig 3.4.10

不同 ξ 下 GPD 的密度函数（ξ 越大，尾越厚，cont'd)



Page 164，Fig 3.4.12

不同 ξ 下 GPD 的密度函数



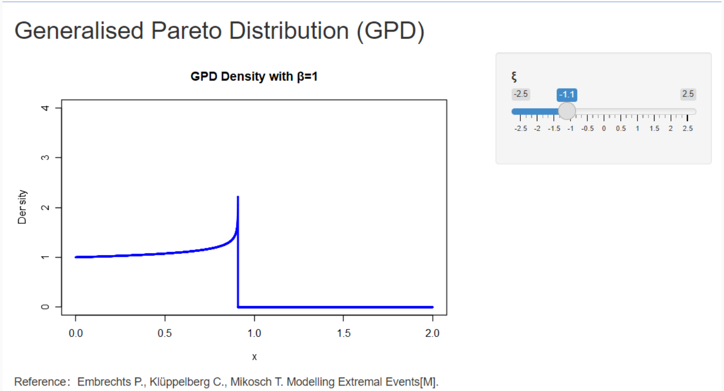
Page 163， Fig 3.4.11

GPD 密度函数的可视化

相关 R 代码

library(shiny)

runUrl("https://yuanzhuang.xyz/uploads/EVT/GPD.zip")



关于 GPD 的一些结论

- $EX < \infty$，如果 $\xi < 1$
- 假设 $x_i \in D(\xi, \beta), i = 1, 2$，那么

$$\frac{\bar{G}_{\xi,\beta}\left(x_1 + x_2\right)}{\bar{G}_{\xi,\beta}\left(x_1\right)} = \bar{G}_{\xi,\beta+\xi x_1}\left(x_2\right) \tag{3.53}$$

GPD 与 GEV 的关系

Theorem 3.4.13: Properties of GPD

假设 N 服从 $\mathrm{Poi}(\lambda)$，与 iid 序列 (X_n) 相独立。(X_n) 服从 GPD 分布，参数为 ξ and β。令 $M_N = \max(X_1, \ldots, X_N)$。那么

$$P(M_N \leq x) = \exp\left\{-\lambda\left(1+\xi\frac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi}\right\} = H_{\xi;\mu,\psi}(x),$$

其中 $\mu = \beta\xi^{-1}\left(\lambda^{\xi}-1\right)$，其中 $\psi = \beta\lambda^{\xi}$。

3.5 Almost Sure Behaviour of Maxima

结论概括

- 并没有像强大数定律那样的统一的定理
- 但有一些 a.s. 的结论

部分最大值的最大 a.s. 增长

Theorem 3.5.1 Characterisation of the maximal a.s. growth of partial maxima

假设 (u_n) 非减，那么

$$P\left(M_n > u_n \ \text{i.o.}\right) = P\left(X_n > u_n \ \text{i.o.}\right) \tag{3.54}$$

特别地，

$$P\left(M_n > u_n \ \text{i.o.}\right) = 0 \text{或} = 1$$

决定于

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(X > u_n\right) < \infty \ \text{或} = \infty. \tag{3.55}$$

部分最大值的最小 a.s. 增长

Theorem 3.5.2 Characterisation of the minimal a.s. growth of partial maxima

假设 (u_n) 非减，且下列条件满足：

$$\bar{F}(u_n) \to 0, \tag{3.57}$$

$$n\bar{F}(u_n) \to \infty. \tag{3.58}$$

那么

$$P(M_n \le u_n \text{ i.o.}) = 0 \text{ 或 } = 1$$

决定于

$$\sum^{\infty} \bar{F}(u_n) \exp\left\{-n\bar{F}(u_n)\right\} < \infty \text{ 或 } = \infty. \tag{3.59}$$

证明几乎处处收敛：上确界和下确界

Corollary 3.5.3: Characterisation of the upper and lower limits of maxima

(a) 假设序列 $u_n(\epsilon) = c_n(1+\epsilon) + d_n, n \in \mathbb{N}$ 对于所有 $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ 非减。那么关系

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}\left(u_n(\epsilon)\right) < \infty \text{ 或 } = \infty$$

决定于 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ 或 $\epsilon \in (-\epsilon_0, 0)$。这表示：

$$\limsup_{n \to \infty} c_n^{-1}\left(M_n - d_n\right) = 1 \quad \text{a.s.}$$

证明几乎处处收敛：上确界和下确界 (cont'd)

Corollary 3.5.3: Characterisation of the upper and lower limits of maxima

(b) 假设序列 $u_n(\epsilon) = c_n(1+\epsilon) + d_n, n \in \mathbb{N}$ 是非减序列且对于所有 $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ 满足 (3.57)，(3.58)。那么下列关系

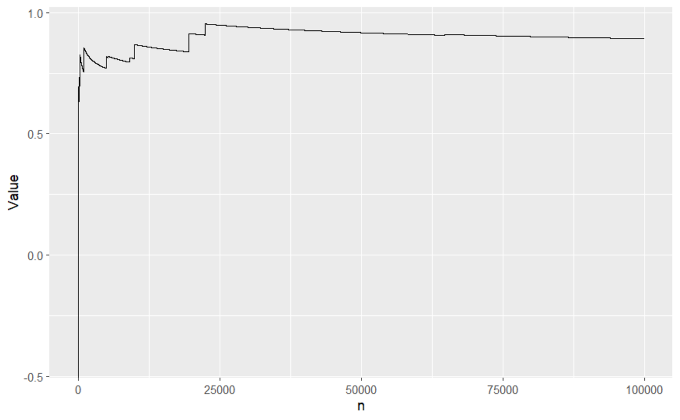
$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}\left(u_n(\epsilon)\right) \exp\left\{-n\bar{F}\left(u_n(\epsilon)\right)\right\} < \infty \text{ 或 } = \infty$$

决定于 $\epsilon \in (-\epsilon_0, 0)$ 或 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$。这表示：

$$\liminf_{n\to\infty} c_n^{-1}\left(M_n - d_n\right) = 1 \quad \text{a.s.}$$

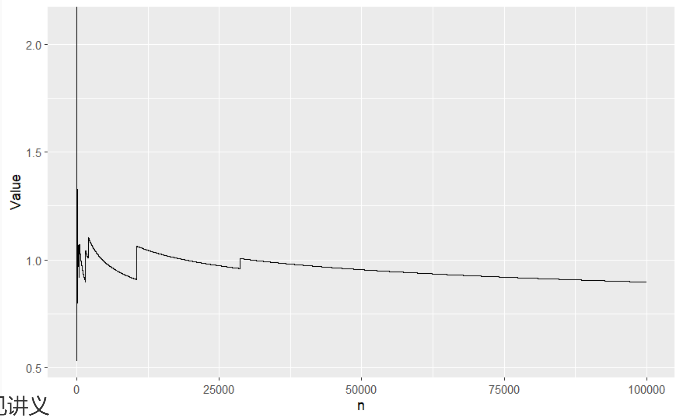
正态分布最大值的几乎处处收敛特性

- $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1$ a.s.



指数尾分布最大值的几乎处处收敛特性

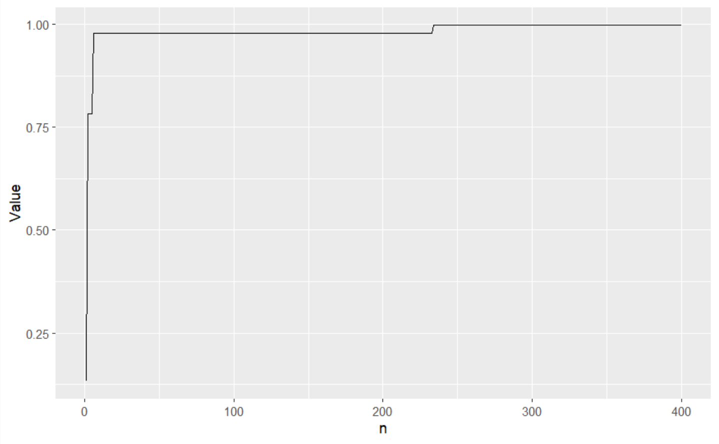
- $\bar{F}(x) \sim Ke^{-ax}, \quad x \to \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln n} = \frac{1}{a}$ a.s.



Page 176-178，证明概览见讲义

均匀分布最大值的几乎处处收敛特性

- $M_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 1$



Thanks!