Modelling Extremal Events: Chap 3 部分定理证明与例题解答

庄源

1 Proposition 3.1.1 (Poisson Approximation)

命题. 对于给定 $\tau \in [0,\infty]$ 和一列实数 (u_n)，下面两式等价：

$$n\bar{F}\left(u_n\right) \rightarrow \tau, \tag{3.4}$$

$$P\left(M_n \leq u_n\right) \rightarrow e^{-\tau}. \tag{3.5}$$

证明. **第一种情况**：$0 \leq \tau < \infty$

从 (3.4) 到 (3.5) 的推导比较直观：

$$P\left(M_n \leq u_n\right) = F^n\left(u_n\right) = \left(1-\bar{F}\left(u_n\right)\right)^n = \left(1-\frac{\tau}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

从 (3.5) 到 (3.4)，对 (3.5) 两边取对数：

$$\ln\left(P\left(M_n \leq u_n\right)\right) = -n\ln\left(1-\bar{F}\left(u_n\right)\right) \rightarrow \tau$$

使用等价无穷小，$-\ln(1-x) \sim x,\ x \rightarrow 0$[1]，也即 $n\bar{F}\left(u_n\right) = \tau + o(1)$。

第二种情况：$\tau = \infty$，使用反证法。

If $\tau = \infty$ and (3.4) holds, but (3.5) does not, there must be a subsequence (n_k) such that $P(M_{n_k} \leq u_{n_k}) \rightarrow \exp\{-\tau'\}$ as $k \rightarrow \infty$ for some $\tau' < \infty$. But then (3.5) implies (3.4), so that $n_k\overline{F}(u_{n_k}) \rightarrow \tau' < \infty$, contradicting (3.4) with $\tau = \infty$. Similarly, (3.5) implies (3.4) for $\tau = \infty$. □

□

2 Corollary 3.1.2

推论. 假设 $x_F < \infty$ 且

$$\bar{F}\left(x_F-\right) = F\left(x_F\right) - F\left(x_F-\right) > 0.$$

那么对于任意的序列 (u_n) 都有：

$$P\left(M_n \leq u_n\right) \rightarrow \rho,$$

要么 $\rho = 0$，要么 $\rho = 1$。

证明. 为了能够使用 Poisson 近似，不妨令 $\rho = \exp\{-\tau\}$，其中 $0 \leq \tau \leq \infty$[2]。由 Poisson 近似，

[1] $\bar{F}\left(u_n\right) \rightarrow 0$ 一定成立，因为若 $\bar{F}\left(u_{n_k}\right)$ 不趋于 0，则 $\Pr\left(M_{n_k} \leq u_{n_k}\right) = \left(1-\bar{F}\left(u_{n_k}\right)\right)^{n_k}$，推出 $\Pr\left(M_{n_k} \leq u_{n_k}\right) \rightarrow 0$，与 (3.5) 相违背。

[2] 上述转换能成立，是因为 $0 \leq \rho \leq 1$。

$n\bar{F}(u_n) \to \tau$，$n \to \infty$。如果 $u_n < x_F$，n 有无限多，我们有 $\bar{F}(u_n) \geq \bar{F}(x_{F-}) > 0$，因此 $\tau = \infty$。另外有可能的情况是 $u_n \geq x_F$，因此 $n\bar{F}(u_n) = 0$，$\tau = 0$。既然 $\tau = \infty$ 或 0，那么 $\rho = 0$ 或 1。 □

3 Example 3.1.4 Poisson Distribution

对于 Poisson 分布，有：

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \lambda > 0$$

从而有：

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-1)} &= 1 - \frac{F(k) - F(k-1)}{\bar{F}(k-1)} = 1 - \frac{P(X = k)}{\bar{F}(k-1)} \\
&= 1 - \frac{\lambda^k}{k!}\left(\sum_{r=k}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}\right)^{-1} = 1 - \left(\frac{k!}{\lambda^k} \times \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{r=k+1}^{\infty}\frac{k!}{r!}\lambda^{r-k}\right)^{-1} \\
&= 1 - \left(1 + \sum_{r=k+1}^{\infty}\frac{k!}{r!}\lambda^{r-k}\right)^{-1} \qquad (1)
\end{aligned}$$

不妨令 $s = r - k$，则

$$\sum_{r=k+1}^{\infty}\frac{k!}{r!}\lambda^{r-k} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^s}{(k+1)(k+2)\cdots(k+s)} \leq \sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{k}\right)^s = \frac{\lambda/k}{1-\lambda/k}, \quad k > \lambda$$

所以 $\bar{F}(k)/\bar{F}(k-1) \to 0$，$k \to \infty$。

4 Example 3.1.5 Geometric distribution

对于几何分布，有：

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < p < 1$$

仿照例 3.1.4 的步骤，

$$\frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-1)} = 1 - (1-p)^{k-1}\left(\sum_{r=k}^{\infty}(1-p)^{r-1}\right)^{-1} = 1 - p \in (0, 1)$$

对于负二项分布，其证明也类似。

5 Theorem 3.2.2 Limit property of max-stable laws

想要证明：最大值的极限分布类型也就是最大稳定分布的类型。

对于最大值的极限分布，假设其有一个非退化的极限分布，该分布在 $\mathbb{R}$ 上连续：

$$\lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

也就是 $c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H$。

此外，对于 $k \in \mathbb{R}$，有：

$$\lim_{n\to\infty} F^{nk}(c_n x + d_n) = \left(\lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n)\right)^k = H^k(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

也有：

$$\lim_{n\to\infty} F^{nk}\left(c_{nk}x+d_{nk}\right)=H(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

也就是 $c_{nk}^{-1}\left(M_n-d_{nk}\right)\xrightarrow{d}H^k$。

那么，由 convergence to type theorem：

$c_{nk}^{-1}\left(M_n-d_{nk}\right)\xrightarrow{d}H^k$ 时，$c_n^{-1}\left(M_n-d_n\right)\xrightarrow{d}H$ 也满足，则存在 $\tilde{c}_k>0$ 和 $\tilde{d}_k\in\mathbb{R}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{nk}}{c_n}=\tilde{c}_k\quad,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{d_{nk}-d_n}{c_n}=\widetilde{d}_k$$

所以对于独立同分布随机变量 $Y_1,\ldots,Y_k$，累积分布函数为 H，

$$\max\left(Y_1,\ldots,Y_k\right)\stackrel{d}{=}\widetilde{c}_kY_1+\tilde{d}_k$$

因此，最大值的极限分布也最大稳定。

6 由式 3.10 推导至 3.11

命题. 由

$$H^t(x)=H(\gamma(t)x+\delta(t))\tag{3.10}$$

有

$$\gamma(st)=\gamma(s)\gamma(t),\quad\delta(st)=\gamma(t)\delta(s)+\delta(t)\tag{3.11}$$

证明.

$$H^{ts}(x)=H(\gamma(ts)x+\delta(ts))$$

则

$$\begin{aligned}H^{ts}(x)&=\left(H^s(x)\right)^t=H^t(\gamma(s)x+\delta(s))\\&=H[\gamma(t)(\gamma(s)x+\delta(s))+\delta(t)]\\&=H(\gamma(t)\gamma(s)x+\gamma(t)\delta(s)+\delta(t))\end{aligned}$$

利用系数的一一对应，可得 (3.11)。 □

7 Theorem 3.3.7 Fréchet 分布的最大吸引域

F 属于 $\Phi_\alpha,\alpha>0$ 的最大吸引域，当且仅当 $\bar{F}(x)=x^{-\alpha}L(x)$（也就是 $\bar{F}\in\mathcal{R}_{-\alpha}$），其中 L 是某种慢变函数。

如果 $F\in\mathrm{MDA}\left(\Phi_\alpha\right)$，那么

$$c_n^{-1}M_n\xrightarrow{d}\Phi_\alpha,\tag{3.14}$$

其中 c_n 是 F 的 $1-1/n$ 分位数（即式 3.13）。

证明. **先证** $\bar{F}\in\mathcal{R}_{-\alpha}\to F\in\mathrm{MDA}\left(\Phi_\alpha\right)$：令 $\bar{F}\in\mathcal{R}_{-\alpha},\alpha>0$。因为 c_n 刚好是 F 的 $1-1/n$ 分位数，有：

$$\bar{F}\left(c_n\right)\sim n^{-1},\quad n\to\infty,\tag{3.15}$$

因此 $\bar{F}(c_n) \to 0, c_n \to \infty$。所以可以构造 $n\bar{F}(c_n x)$。对于 $x > 0$

$$n\bar{F}(c_n x) \sim \frac{\bar{F}(c_n x)}{\bar{F}(c_n)} \to x^{-\alpha}, \quad n \to \infty.$$

由表征定理 3.3.2，$F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$。

再证 $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha) \to \bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$：

假对于所有 $x > 0$，$c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$，存在适当的 $\lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = \Phi_\alpha(x)$。我们可以寻找另一种形式的收敛：

$$\lim_{n\to\infty} F^n\left(c_{[ns]}x + d_{[ns]}\right) = \Phi_\alpha^{1/s}(x) = \Phi_\alpha\left(s^{1/\alpha}x\right), \quad s > 0, x > 0$$

上面的 $\Phi_\alpha^{1/s}(x) = \Phi_\alpha\left(s^{1/\alpha}x\right)$ 其实是 $\Phi_\alpha = \exp\{-x^{-\alpha}\}$ 的性质。由 convergence to type theorem，有：

$$c_{[ns]}/c_n \to s^{1/\alpha} \quad 且 \quad \left(d_{[ns]} - d_n\right)/c_n \to 0$$

上述式子中，c_n 是一个正则变化序列，正则变化序列的定义和正则变化函数的定义差不多：

Definition A3.13 (Regularly varying sequences)
A sequence (c_n) of positive numbers is regularly varying of index $\alpha \in \mathbb{R}$ *if*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{[tn]}}{c_n} = t^\alpha, \quad t > 0. \qquad \square$$

Whenever (c_n) is regularly varying with index α, then $c(x) = c_{[x]}$ belongs to $\mathcal{R}_\alpha$. Through this property, most of the results of $\mathcal{R}_\alpha$ carry over to the sequence case. For details see Bingham et al. [72], Section 1.9.

图 1: 原书第 571 面，正则变化序列的定义

且 $d_n = 0$，由表征定理可得 $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$ 便意味着 $n\bar{F}(c_n x) \to x^{-\alpha}$，但我们还差一步，证明 $n\bar{F}(c_n x) \to x^{-\alpha}$ 即是 $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$。定理 A3.8（a）阐释了慢变序列和正则变化的关系：

Proposition A3.8 (Regular variation for tails of dfs)
Suppose F is a df with $F(x) < 1$ for all $x \geq 0$.

(a) *If the sequences (a_n) and (x_n) satisfy $a_n/a_{n+1} \to 1$, $x_n \to \infty$, and if for some real function g and all λ from a dense subset of $(0,\infty)$,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overline{F}(\lambda x_n) = g(\lambda) \in (0,\infty),$$

then $g(\lambda) = \lambda^{-\alpha}$ for some $\alpha \geq 0$ and $\overline{F}$ is regularly varying.

图 2: 原书第 568 面，慢变序列和正则变化的关系

由此定理得证。 $\square$

8 Theorem 3.3.12 的充分性证明

F 属于 $\Psi_\alpha, \alpha > 0$ 的最大吸引域，当且仅当 $x_F < \infty$ 且 $\bar{F}(x_F - x^{-1}) = x^{-\alpha}L(x)$（也就是 $\bar{F}(x_F - x^{-1}) \in \mathcal{R}_{-\alpha}$），其中 L 是某种慢变函数。

如果 $F \in \mathrm{MDA}(\Psi_\alpha)$，那么

$$c_n^{-1}(M_n - x_F) \xrightarrow{d} \Phi_\alpha, \tag{3.20}$$

其中 c_n、d_n 分别为：F 的 $1-1/n$ 分位数到右端点的距离和右端点 x_F。

证明. 假设 $x_F < \infty$，$\bar{F}\left(x_F - x^{-1}\right) = x^{-\alpha}L(x)$，令

$$F_*(x) = F\left(x_F - x^{-1}\right) \tag{3.21}$$

$\bar{F}_* \in \mathcal{R}_{-\alpha}$，由定理 3.3.7 可推得，$F_* \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$。$c_n^* = F_*^{\leftarrow}\left(1-n^{-1}\right)$ 且 $d_n^* = 0$。下面的证明集中在如何反推上。

由 $F_* \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$，我们有：

$$F_*^n\left(c_n^* x\right) \to \Phi_\alpha(x)$$

也即：

$$F^n\left(x_F - \left(c_n^* x\right)^{-1}\right) \to \exp\left\{-x^{-\alpha}\right\}$$

令 $x = -y^{-1}$，则有：

$$F^n\left(x_F + y/c_n^*\right) \to \exp\left\{-(-y)^\alpha\right\}, \quad y < 0 \tag{3.22}$$

最后求出 c_n^*，其为 c_n 的倒数：

$$\begin{aligned}
c_n^* &= F_*^{\leftarrow}\left(1-n^{-1}\right) \\
&= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F\left(x_F - x^{-1}\right) \geq 1 - n^{-1}\right\} \\
&= \inf\left\{\left(x_F - u\right)^{-1} : F(u) \geq 1 - n^{-1}\right\} \\
&= \left(x_F - \inf\left\{u : F(u) \geq 1 - n^{-1}\right\}\right)^{-1} \\
&= \left(x_F - F^{\leftarrow}\left(1-n^{-1}\right)\right)^{-1}
\end{aligned}$$

□

9 Example 3.3.16：Power law behaviour

这种分布的生存函数具有下面的幂函数形式：

$$\bar{F}(x) = K\left(x_F - x\right)^\alpha, \quad x_F - K^{-1/\alpha} \leq x \leq x_F, \quad K, \alpha > 0$$

先计算 $1-1/n$ 的分位数，为：

$$K\left(x_F - x\right)^\alpha = 1/n \longrightarrow x = x_F - (Kn)^{-1/\alpha}$$

所以 $c_n = (Kn)^{-1/\alpha}$。

10 Example 3.3.17 Beta 分布

Beta 分布的密度函数如下所示：

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1, \quad a, b > 0$$

注意到 $f\left(1-x^{-1}\right)$ 正则变化，参数为 $-(b-1)$。那么 $\bar{F}\left(1-x^{-1}\right)$ 可被表示为下面的积分形式：

$$\bar{F}\left(1-x^{-1}\right)=\int_{1-x^{-1}}^{1} f(y)dy$$

不妨令 $y=1-u^{-1}$，换元后，积分为：

$$\int_{1-x^{-1}}^{1} f(y)dy=\int_{x}^{\infty} f\left(1-u^{-1}\right)u^{-2}du$$

由 Karamata 定理，可得 $\bar{F}\left(1-x^{-1}\right)$ 正则变化，参数为 $-b$，且

$$\bar{F}(x)\sim\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}(1-x)^{b},\quad x\uparrow 1$$

这刚好与 Example 3.3.16 中描述的 power law behaviour 相似，令 $K=\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}$ 因此，$c_n=\left(n\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}\right)^{-1/b}$。

11 Example 3.3.19 Exponential Distribution

证明：$\bar{F}(x)=e^{-\lambda x},\quad x\geq 0,\quad \lambda>0$ 具有辅助函数 $a(x)=\lambda^{-1}$。

$$c\exp\left\{-\int_{z}^{x}\frac{1}{a(t)}dt\right\}=c\exp\left\{-\lambda(x-z)\right\}$$

只要令 $c=e^{-\lambda z}$，即可得到指数分布的生存函数。

12 Example 3.3.22 Exponential behaviour at the finite right endpoint

证明:$\bar{F}(x)=K\exp\left\{-\dfrac{\alpha}{x_F-x}\right\},\quad x<x_F,\quad \alpha,K>0$,其辅助函数为$a(x)=\dfrac{(x_F-x)^2}{\alpha},\quad x<x_F$。

$$c\exp\left\{-\int_{z}^{x}\frac{1}{a(t)}dt\right\}=c\exp\left\{-\int_{z}^{x}\frac{\alpha}{(x_F-x)^2}dt\right\}=c\exp\left\{\alpha[(x_F-z)^{-1}-(x_F-x)^{-1}]\right\}$$

只要令 $c=K\times\exp\left\{-\alpha(x_F-x)^{-1}\right\}$，即可得到生存函数。

13 Example 3.3.23 Differentiability at the right endpoint

令 F 为累积分布函数，$x_F\leq\infty$，存在 $z<x_F$，使 F 在 (z,x_F) 上二阶可导，导数为正数。另外，$f=F'$，$F''(x)<0,z<x<x_F$。F 是 von Mises 函数，辅助函数为 $a=\bar{F}/f$，当且仅当

$$\lim_{x\uparrow x_F}\bar{F}(x)F''(x)/f^2(x)=-1 \tag{3.25}$$

证明很简单。

$$\begin{aligned}a'&=\frac{\bar{F}'f-\bar{F}f'}{f^2}\\&=\frac{-f^2-\bar{F}F''}{f^2}\end{aligned}$$

即得 $\lim_{x\uparrow x_F}\bar{F}(x)F''(x)/f^2(x)=-1$。
充分性的构造与上述证明相似。

14 Proposition 3.3.24 Properties of von Mises functions

命题. *每个 von Mises 函数 F 在 (z,x_F) 上都绝对连续，密度函数 f 为正。辅助函数可以选为 $a(x)=\bar{F}(x)/f(x)$。另外，下面的特点都成立：*

(a) 如果 $x_F=\infty$，那么 $\bar{F}\in\mathcal{R}_{-\infty}$ 且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{\bar{F}(x)}=\infty. \tag{3.26}$$

(b) 如果 $x_F<\infty$，那么 $\bar{F}\left(x_F-x^{-1}\right)\in\mathcal{R}_{-\infty}$ 且

$$\lim_{x\uparrow x_F}\frac{(x_F-x)\,f(x)}{\bar{F}(x)}=\infty. \tag{3.27}$$

证明. (a) 因为 $a'(x)\to 0, x\to\infty$，那么 a' 的切赛罗均值也收敛：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_z^x a'(t)dt=0.$$

$\bar{F}\in\mathcal{R}_{-\infty}$ 由 A3.12(b) 可以推出。

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow x_F}\frac{a(x)}{x_F-x}&=\lim_{x\uparrow x_F}-\int_x^{x_F}\frac{a'(t)}{x_F-x}dt\\&=\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\int_0^s a'\left(x_F-t\right)dt\end{aligned}$$

$a'\left(x_F-t\right)\to 0$ as $t\downarrow 0$。$\bar{F}(x_F-x^{-1})\in\mathcal{R}_{-\infty}$ 由 A3.12(b) 可以推出。 □

注：切赛罗均值定理：

$$\lim_{n\to\infty}a_n=l\to\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=l$$

15 Proposition 3.3.25 Von Mises functions and MDA(Λ)

由原书 3.24，有：

$$\frac{\bar{F}(x+ta(x))}{\bar{F}(x)}=\exp\left\{-\int_x^{x+ta(x)}\frac{1}{a(u)}du\right\}$$

令 $v=(u-x)/a(x)$，换元后得：

$$\frac{\bar{F}(x+ta(x))}{\bar{F}(x)}=\exp\left\{-\int_0^t\frac{a(x)}{a(x+va(x))}dv\right\}.$$

书中证明了局部一致收敛：

$$\lim_{x\uparrow x_F}\frac{a(x)}{a(x+va(x))}=1 \tag{3.31}$$

因此有：

$$\lim_{x\uparrow x_F}\frac{\bar{F}(x+ta(x))}{\bar{F}(x)}=e^{-t} \tag{3.32}$$

选择 $d_n=(1/\bar{F})^{\leftarrow}(n)$ 和 $c_n=a\left(d_n\right)$。那么（3.32）意味着：

$$\lim_{n\to\infty}n\bar{F}\left(d_n+tc_n\right)=e^{-t}=-\ln\Lambda(t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

16 Example 3.3.29：Normal Distrbution

证明正态分布在 MDA(Λ) 中，并求出 c_n 和 d_n。

对于正态分布，其有如下结论[3]：

$$\frac{x}{x^2+1} < R_x < \frac{1}{x}$$

其中，R_x 是米尔斯比率，定义为 $R_x = \bar{\Phi}(x)/\varphi(x)$。由夹逼定理，直接可以看出 $xR_x \to 1, x \to \infty$。也即：

$$\bar{\Phi}(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x}$$

再直接对 $\bar{\Phi}(x)/\left(x^{-1}\varphi(x)\right)$ 使用洛必达法则，有 $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$。于是：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{\Phi}(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = -1$$

这便印证了式 3.25 中的条件 $\lim_{x\uparrow x_F} \bar{F}(x)F''(x)/f^2(x) = -1$。

使用米尔斯比率对正态分布的生存函数进行近似，有：

$$\bar{\Phi}(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2}, \quad x \to \infty \tag{3.38}$$

代入 d_n 为 $1-1/n$ 分位数，解得：

$$d_n = (2\ln n)^{1/2} - \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2(2\ln n)^{1/2}} + o\left((\ln n)^{-1/2}\right)$$

且：

$$c_n = a\left(d_n\right) \sim (2\ln n)^{-1/2}$$

所以有：

$$\sqrt{2\ln n}\left(M_n - \sqrt{2\ln n} + \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2(2\ln n)^{1/2}}\right) \xrightarrow{d} \Lambda \tag{3.40}$$

17 Example 3.5.6 证明概览

想要证明，对于指数尾分布：$\bar{F}(x) \sim Ke^{-ax}, \quad x \to \infty$

有：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln n} = \frac{1}{a} \quad \text{a.s.}$$

对于上确界，应该选择：

$$u_n(\epsilon) = \frac{1}{a}\ln\left(K\left(\ln_0 n \ln_1 n \cdots \ln_r n\right)\ln_r^{\epsilon}\right), \quad r \geq 0$$

对于下确界，应该选择：

$$u_n'(\epsilon) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{nK}{\ln\left(\ln_2 n\left(\ln_1 n \cdots \ln_r n\right)\ln_r^{\epsilon} n\right)}\right), \quad r \geq 1$$

下确界的选择能让

$$P\left(M_n \leq u_n'(\epsilon) \text{ i.o.}\right) = 0 \text{ 或 } = 1$$

依赖于 ϵ 的正负号。

[3]Lu, D., Song, L. & Tang, G. Some New Approximations and Proofs for Mills’ Ratio. *Results Math* 73, 27 (2018). https://doi.org/10.1007/s00025-018-0798-5

下面进行验证：

$$u_n'(\epsilon) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{nK}{\ln\left(\ln_2 n\left(\ln_1 n\cdots\ln_r n\right)\ln_r^{\epsilon} n\right)}\right), \quad r \geq 1$$

$$\begin{aligned}
&P\left(M_n \leq u_n'(\epsilon) \quad \text{i.o. }\right)\\
&\quad = P\Bigg(M_n \leq \frac{1}{a}\left(\ln(nK) - \ln\left(\ln_3 n + \left(\ln_2 n + \ln_3 n + \cdots\right.\right.\right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left.\left.\left. + \ln_{r+1} n + (1+\epsilon)\ln_{r+2} n\right)\right)\right) \text{ i.o. }\Bigg)\\
&\quad = P\Bigg(M_n - \frac{1}{a}\left(\ln(nK) - \ln\left(\ln_3 n + \left(\ln_2 n + \cdots + \ln_{r+1} n\right)\right)\right)\\
&\leq -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{\ln_3 n + \left(\ln_2 n + \cdots + \ln_{r+1} n + (1+\epsilon)\ln_{r+2} n\right)}{\ln_3 n + \left(\ln_2 n + \cdots + \ln_{r+1} n\right)}\right) \text{ i.o. }\Bigg)\\
&\quad = P\Bigg(M_n - \frac{1}{a}\left(\ln(nK) - \ln\left(\ln_3 n + \left(\ln_2 n + \cdots + \ln_{r+1} n\right)\right)\right)\\
&\quad \leq -\frac{1}{a}\ln\left(1 + (1+\epsilon)\frac{\ln_{r+2} n}{\ln_3 n + \left(\ln_2 n + \cdots + \ln_{r+1} n\right)}\right) \text{ i.o. }\Bigg).
\end{aligned}$$