《精算数学》：复利数学

主编：张连增

本册参编：庄源 刘庆晓

南开大学金融学院精算学系

版本：3.0

封面图片、内部格式仅做展示用，不代表最终成品。

作者简介

张连增，理学博士。南开大学金融学院精算学系主任、教授、博导，中国精算师协会正会员、理事。墨尔本大学、滑铁卢大学、洛桑大学等高校访问学者。目前研究方向主要包括精算风险理论、非寿险精算统计建模、机器学习精算应用等，多次受邀参加学术会议并作报告。自 1996 年于南开大学数学系博士毕业以来，已有 20 多年的高校教学科研工作经历，专注于精算教学与科研工作。主持国家自然科学基金和中国保监会课题。代表性著作包括《寿险精算》(中国精算师资格考试指定用书)，《未决赔款准备金评估的随机性模型与方法》，《精算学中的随机过程》等。部分研究论文发表于《保险研究》，《统计研究》，《数量经济技术经济研究》，Insurance: Mathematics and Economics，North American Actuarial Journal，Scandinavian Actuarial Journal，Astin Bulletin 等期刊。近年来讲授精算风险理论、定量风险管理、保险统计分析等专业课程，教学经验丰富。自 2000 开始，参与中国精算师资格考试工作。

目录

第 1 章 利息的基本概念 **1**

1.1 利息度量 1

1.1.1 实际利率 2

1.1.2 单利和复利 3

1.1.3 实际贴现率 4

1.1.4 名义利率和名义贴现率 6

1.1.5 利息力 8

1.2 利率问题求解 11

1.2.1 价值方程 11

1.2.2 投资期的确定 12

1.2.3 未知时期问题 13

1.2.4 未知利率问题 14

第 1 章 练习 15

第 2 章 年金 **17**

2.1 标准型年金 17

2.1.1 期末付年金 17

2.1.2 期初付年金 19

2.1.3 在任意时刻的年金值 20

2.1.4 永续年金 22

2.1.5 年金的未知时期问题 23

2.1.6 年金的未知利率问题 25

2.2 一般型年金 26

2.2.1 变利率年金 26

2.2.2 付款频率与计息频率不同的年金 27

2.2.3 连续年金 31

2.2.4 基本变化年金 32

2.2.5 更一般变化年金 34

2.2.6 连续变化年金 37

第 2 章 练习 38

第 3 章 收益率 **39**

3.1 收益率的定义 39

3.1.1 内部收益率 39

3.1.2 再投资收益率 41
3.2 收益率的应用 43
3.2.1 基金收益率 43
3.2.2 时间加权收益率 44
3.2.3 投资组合法和投资年法 47
3.2.4 资本预算 50
3.2.5 股息贴现模型 50
第 3 章 练习 52

第 4 章 债务偿还 **53**
4.1 分期偿还计划 53
4.1.1 贷款余额 53
4.1.2 分期偿还表 55
4.1.3 偿还频率与计息频率不同时的分期偿还表 57
4.1.4 变动偿还系列 60
4.2 偿债基金 61
4.2.1 偿债基金表 61
4.2.2 偿还频率与计息频率不同时的偿债基金法 65
4.2.3 变额偿还系列 66
第 4 章 练习 69

附录 A 利息函数表 **74**

第 1 章 利息的基本概念

学习目标

本章主要介绍利息理论中涉及的基本概念及其性质，包括实际利率、单利、复利、利息力、贴现率、贴现因子、名义利率、名义贴现率等。本章还介绍了价值方程及其在利息问题求解中的应用。

利息是在一定时期内，资金拥有人将资金的使用权转让给借款人后所得到的报酬。因此，利息也可看作是一种租金，即借方向贷方支付的在一段时间内由于资金转让而使贷方不能使用该笔资金所引起的损失。理论上利息可以是实物也可以是货币，但在实际中，利息大多以货币的形式存在，本书中的资金和利息都将用货币来表示。

§1.1 利息度量

在给出利息的几个基本度量方式前，首先引入几个基本概念：我们把每项业务开始时的投资金额称为**本金**；把业务在一段时间后回收到的总金额称为业务结束时的**积累值（或终值）**。显然，积累值与本金的差额就是这一时期的利息金额。

在本篇，我们考虑如下的简单情况：一旦给定了本金金额和时间，该投资在金额上的任何变化全部随利息而变化。也可以说，决定积累值的两个主要因素就是本金金额和从投资日算起的时间长度。对于时间长度的度量，可以采用日、周、月、季、半年、一年等，最常用的度量单位是年，我们用“期”表示度量单位。以后除非另外声明，均可认为一期为一年。

对于利息的度量，我们引入积累函数的概念：用 $a(t)$ 表示 0 时刻的本金 1 经过 t 段时间的连续积累得到的积累值，并称定义在 $t \in [0,\infty)$ 上的函数 $a(t)$ 为积累函数，由定义可知 $a(0)=1$。注意到这里 t 的取值可推广到任何正数。通常情况下，$a(t)$ 为单增函数，这意味着整个积累过程的利息是正的；但在实务中也存在负利息的情况，如一笔亏本的生意就意味着产生了负的利息。

积累函数 $a(t)$ 有时也称为 t 期积累因子，因为它是 1 单位本金在 t 期末的积累值。通常 $a(t)$ 为连续函数。但 $a(t)$ 也可能是间断的，例如只到付息日才产生利息的情形。

本金金额一般不是一个单位，而是 k 个单位，这时我们定义一个总量函数 $A(t)$，用它表示本金为 k 的投资在时刻 $t \geqslant 0$ 时的积累值。$A(t)$ 与 $a(t)$ 仅相差一个倍数 k，即

$$A(t)=k\cdot a(t) \tag{1.1.1}$$

因此，$A(t)$ 与 $a(t)$ 具有类似的性质。积累函数与总量函数常常可以互相替换使用。

从投资开始向投资后某一时刻看，我们用积累函数 $a(t)$；从投资后某一时刻向投资开始看，我们引入积累函数的倒数 $a^{-1}(t)$，称为 t **期折现因子或折现函数**。特别地，把

一期折现因子 $a^{-1}(1)$ 简称为**折现因子**，并记为 v。

为了在 t 期末得到某个积累值，而在开始时投资的本金金额称为该积累值的**现值**（或折现值）。显然，$a^{-1}(t)$ 是在 t 期末支付 1 的现值，在 t 期末支付 k 的现值为 $k \cdot a^{-1}(t)$。

积累与折现是相反的过程，$a(t)$ 为 1 单位本金在 t 期末的积累值，而 $a^{-1}(t)$ 是在 t 期末支付 1 单位积累值的现值。

需要注意，这里所说的“积累值”严格地只与该时点以前的款项有关；“现值”只与该时点以后的款项有关；而对于既与该时点以前的款项有关，又与该时点以后的款项有关的值，将使用“当前值”这个词。

我们把从投资日起第 n 期所得到的利息金额记为 I_n，即

$$I_n = A(n) - A(n-1) \quad \text{对整数} n \geqslant 1 \tag{1.1.2}$$

1.1.1 实际利率

某一度量期的**实际利率**，是指该度量期内得到的利息金额与此度量期开始时投资的本金金额之比，通常用字母 i 来表示。

由定义可以看出，实际利率是一个比值，没有单位，它与给定的时期有关，是单位本金在给定的时期上产生的利息金额。

从积累函数看，就有：

$$a(1) = a(0) + i = 1 + i \tag{1.1.3}$$

从利率看，就有：

$$i = 1 + i - 1 = a(1) - a(0) = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)} \tag{1.1.4}$$

对于多个度量期的情形，可以分别定义各个度量期的实际利率，从投资日算起，第 n 期的利率可以表示为：

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)} \quad (n \geqslant 1 \text{为整数}) \tag{1.1.5}$$

【例 1-1】 某人到银行存入 1000 元，第一年末存折上的余额为 1050 元，第二年末存折上的余额为 1100 元，问第一年、第二年的实际利率分别是多少？

解： 由题意

$$I_1 = A(1) - A(0) = 50$$

$$I_2 = A(2) - A(1) = 50$$

所以

$$i_1 = \frac{I_1}{A(0)} = \frac{50}{1000} = 5\%$$

$$i_2 = \frac{I_2}{A(1)} = \frac{50}{1050} = 4.76\%$$

因此第一年的实际利率为 5%，第二年的实际利率为 4.76%。

1.1.2 单利和复利

前面讨论的实际利率 i 是针对一个完整度量期而言，如投资期为多个或非整数个度量期，如何来进行利息的度量呢?

实务中，有两种最重要的度量方式：**单利**和**复利**。

考虑投资一单位本金：

(1) 如果 t 时的积累值为：

$$a(t)=1+i\cdot t \tag{1.1.6}$$

那么，该笔投资以每期单利 i 计息，并称这样产生的利息为单利。

(2) 如果 t 时的积累值为：

$$a(t)=(1+i)^t \tag{1.1.7}$$

那么，该笔投资以每期复利 i 计息，并称这样产生的利息为复利。式 (1.1.7) 可通过特殊情形 $t=2$ 来理解。对于单位本金，经过一个时期后，积累值为 $1+i$，把它视为本金，再经过一个时期后，积累值为 $(1+i)\cdot(1+i)=(1+i)^2$。

由上述定义可以发现：

(1) 对于单位本金以每期单利 i 计息，那么投资期间每一度量期产生的利息金额均为常数 i，即

$$I_n=a(n)-a(n-1)=(1+in)-[1+i(n-1)]=i$$

对整数 $n\geqslant 1$，第 n 期的实际利率为：

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=\frac{(1+in)-[1+i(n-1)]}{1+i(n-1)}=\frac{i}{1+i(n-1)}$$

可以看出，单利的计息方式下，实际利率不一定为 i，且 i_n 关于 n 单调递减。

(2) 对于单位本金以每期复利 i 计息，那么投资期间不同度量期产生的利息为：

$$I_n=a(n)-a(n-1)=(1+i)^n-(1+i)^{n-1}=i\cdot(1+i)^{n-1}=i\cdot a(n-1)$$

可以看出，在复利的度量方式下不同投资时期产生的利息金额是不同的，且 I_n 关于 n 单调递增。

对整数 $n\geqslant 1$，第 n 期的实际利率为：

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=\frac{I_n}{a(n-1)}=i$$

因此，复利的计息方式下，实际利率为 i。

容易看出，单利的利息在以后的时期不再产生利息；而复利的利息在任何时刻都将与本金一起继续用于投资以赚取更多利息，这也就是民间所说的“利滚利”。

由积累函数看，单利的积累函数关于 t 是线性函数，复利的积累函数关于 t 是指数函数。当 $t\geqslant 1$ 时，有 $(1+i)^t\geqslant 1+it$，所以复利比单利产生更大的积累值；而对于较短

时期，有相反的结论，即当 $t \leqslant 1$ 时，$(1+i)^t \leqslant 1+it$。

实务中，复利常用于长期金融业务与大多数短期金融业务中，仅有少数的短期金融业务会使用单利。有时也将单利作为复利在非整数时期内的近似。除非特别声明，本书使用复利。

【例 1-2】 某银行年息为 6%。某人存入 5000 元，以单利计息，问 5 年后的积累值是多少？如改为复利计息呢？

解： 如以单利计息，就有

$$A(5) = 5000 \times a(5) = 5000 \times (1 + 5 \times 6\%) = 5000 \times 1.3 = 6500\ (\text{元})$$

即 5 年后的积累值为 6500 元。

如以复利计息，就有

$$A(5) = 5000 \times a(5) = 5000\,(1 + 6\%)^5 = 6691.13\ (\text{元})$$

即 5 年后的积累值为 6691.13 元。

1.1.3 实际贴现率

前面我们介绍了实际利率，它度量了投资者单位本金在期末时应付的利息，是从现值到终值的度量过程。现在引入实际贴现率的概念，它度量了单位本金在期初时可提前支付的利息金额，是从终值到现值的度量过程，我们可以理解为实际贴现率是与实际利率逆向的度量方式。

一个度量期的**实际贴现率**为该度量期内取得的利息金额与期末的投资可回收金额之比。在以实际贴现率计息的情形中，借款者预先按照贴现率支付利息，借到的金额是本金扣除利息后的金额，在投资期末再归还全部本金金额。与实际利率一样，实际贴现率也是一个比值，通常用字母 d 来表示。

在本章初，我们介绍了折现因子 v，也就是积累函数的倒数 $a^{-1}(t)$，与(1.1.3)式类似，在一个度量期的情形下，从折现因子看，就有：

$$v = a^{-1}(1) = 1 - d \tag{1.1.8}$$

从实际贴现率看，有：

$$\begin{aligned} d &= 1-(1-d) = a^{-1}(0) - a^{-1}(1) = 1 - a^{-1}(1) = \frac{a(1)-a(0)}{a(1)} \\ &= \frac{A(1)-A(0)}{A(1)} = \frac{I_1}{A(1)} \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

而对于多个度量期的情形，可以分别计算各个度量期的实际贴现率，从投资日算起，第 n 期的实际贴现率 d_n 可以表示为：

$$d_n = \frac{A(n)-A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)} \quad (n \geqslant 1\text{为整数}) \tag{1.1.10}$$

一般地，d_n 随 n 的不同而不同。但是在复利假设下，如果实际利率为常数，那么实

际贴现率也是常数。事实上，如每期实际利率为 i，那么对任意 $n \geqslant 1$，有

$$a(n) = (1+i)^n$$

$$d_n = \frac{a(n)-a(n-1)}{a(n)} = \frac{(1+i)^n-(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n} = \frac{i}{1+i}$$

可以看出，d_n 为常数，与 n 无关，我们将其称为“复贴现”，是类似“复利”的一个术语，是复利计息的逆过程。

下面来举一个例子以区分利率与贴现率：假设王某到一家银行贷款 100 元，实际利率为 6%，为期一年，那么一年后王某将还给银行贷款本金 100 元和利息 6 元，共计 106 元。假如改为以实际贴现率 6% 贷款 100 元，为期一年，那么银行将提前在贷款时预收 6% 的利息，即 6 元，而仅付给王某 94 元。一年后，王某将还给银行 100 元。

可以看出，实际利率其实是对期末支付的利息的度量，而实际贴现率是对期初支付的利息的度量。

与实际贴现率对应的贴现金额，也是利息金融，如 $I_1 = A(1)\cdot d$，

贴现金额 = 期末可收回资金金额 × 贴现率

注意到 $I_1 = A(0)\cdot i$，即

利息金额 = 期初投资金额 × 利率

像实际利率和实际贴现率这样的利息度量方式有多种，为了比较这些度量方式，我们引入“等价”的概念：如果对给定的投资金额，在同样长的时期内，产生同样的积累值，就称两种度量方式是等价的。例如，年实际贴现率 6% 与年实际利率 6.38% 等价。同一笔业务由不同度量方式而得出的“率”是等价的。

为进一步探讨实际利率与实际贴现率的等价关系，我们引入一个例子：某人以实际贴现率 d 借款 1，支付利息后，实际上在投资期初借到的本金为 $1-d$，而利息 (贴现) 金额为 d。因此与实际贴现率 d 等价的实际利率 i 可表达为：

$$i = \frac{d}{1-d} \tag{1.1.11}$$

变换上式得到实际贴现率 d 的表达：

$$d = \frac{i}{1+i} \tag{1.1.12}$$

由折现因子 $v = a^{-1} = \dfrac{1}{1+i}$，也可以推出贴现率 d 与折现因子 v 之间的重要关系：

$$d = i\cdot\frac{1}{1+i} = iv \tag{1.1.13}$$

对上式，可以这样理解：在实际利率为 i 的投资中，如本金为 1，那么利息金额为 i，期末支付。利息 i 用折现因子贴现到期初，即为 iv，这也就是在等价的实际贴现率为 d 时，期初应该提前支付的贴现（利息）金额 d。

由(1.1.13)式，可以得到：

$$d = 1-v$$

i 和 d 之间还存在如下关系：

$$v = 1 - d \tag{1.1.14}$$

$$i - d = id \tag{1.1.15}$$

上式可以理解为：某人可以期初借款 1 而在期末还 $1+i$，也可以期初借 $1-d$ 而在期末还 1。两种选择本金的差为 d，因此利息差为 id。利息差还可以表示为 $i-d$。

我们讨论的贴现率通常指**复贴现**，当然也可以类似地定义**单贴现**，假设每期贴现金额为常数，那么在 t 时产生积累值 1，对应的本金金额为：

$$a^{-1}(t) = 1 - dt, \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{d} \tag{1.1.16}$$

注意到上式右边对 t 是有限制的。本书不再涉及单贴现。

对复贴现，就有：

$$a^{-1}(t) = v^t = (1-d)^t, \quad t \geqslant 0 \tag{1.1.17}$$

类似对利率的讨论，常数的复贴现率意味着常数的实际贴现率，即有：

$$d_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n)} = \frac{(1-d)^{-n} - (1-d)^{-(n-1)}}{(1-d)^{-n}} = 1 - (1-d) = d$$

因此，常数的复贴现情形下，复贴现率与实际贴现率是相同的。

【例 1-3】 设 $0 < d < 1$，证明：

（1）当 $0 < t < 1$ 时，$(1-d)^t < 1 - dt$；

（2）当 $t = 1$ 时，$(1-d)^t = 1 - dt$；

（3）当 $t > 1$ 时，$(1-d)^t > 1 - dt$。

证明： 令

$$f(d) = (1-d)^t - (1-dt)$$

求导得到

$$f'(d) = -(1-d)^{t-1} \cdot t + t = t[1 - (1-d)^{t-1}]$$

(1) 当 $0 < t < 1$ 时，$(1-d)^{t-1} > 1$，从而 $f'(d) < 0$，$f(d)$ 为单调递减函数。所以，对任意 $0 < d < 1$，有 $f(d) < f(0) = 0$，即 $(1-d)^t < 1 - dt$；

(2) 代入 $t = 1$，可得 $(1-d)^t = 1 - dt$；

(3) 当 $t > 1$ 时，$(1-d)^{t-1} < 1$，从而 $f'(d) > 0$，$f(d)$ 为单调递增函数。所以，对任意 $0 < d < 1$，有 $f(d) > f(0) = 0$，即 $(1-d)^t > 1 - dt$。

1.1.4 名义利率和名义贴现率

前面我们讨论了实际利率和实际贴现率，默认假设每期支付一次利息。但在实际中往往存在一期支付多次利息或多期支付一次利息的情况，这时候一期的利率和贴现率将是**“名义”**上的。

如每期支付 m 次利息（或每 $\frac{1}{m}$ 期支付一次利息），记每期的名义利率记为 $i^{(m)}$，m 一般为大于 1 的整数。因为 $i^{(m)}$ 要求每 $\frac{1}{m}$ 期支付一次利息，因此可以将 $\frac{1}{m}$ 期视为新的度量期，每 $\frac{1}{m}$ 期上的实际利率为 $\frac{i^{(m)}}{m}$。也就是说，每期 $i^{(m)}$ 的名义利率等价于每 $\frac{1}{m}$ 期 $\frac{i^{(m)}}{m}$ 的实际利率。例如，如一年为一期，每季度计息 1 次，年名义利率 $i^{(4)}=8\%$ 等价于每季度实际利率 2%。

如每期的实际利率为 i，那么名义利率 $i^{(m)}$ 与等价的实际利率 i 的关系为：

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} \tag{1.1.18}$$

从而有：

$$i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}-1 \tag{1.1.19}$$

$$i^{(m)}=m[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1] \tag{1.1.20}$$

类似地，用符号 $d^{(m)}$ 记每期计息 m 次的名义贴现率，那么每 $\frac{1}{m}$ 个度量期的实际贴现率为 $\frac{d^{(m)}}{m}$。如每期的实际贴现率为 d，那么名义贴现率 $d^{(m)}$ 与等价的实际贴现率 d 的关系为：

$$1-d=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m} \tag{1.1.21}$$

从而有：

$$d=1-\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m} \tag{1.1.22}$$

$$d^{(m)}=m[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}]=m(1-v^{\frac{1}{m}}) \tag{1.1.23}$$

名义利率与名义贴现率的关系可由下式得到：

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=1+i=\left(1-\frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} \tag{1.1.24}$$

如 $m=p$，上式可化简为：

$$1+\frac{i^{(m)}}{m}=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-1} \tag{1.1.25}$$

进一步变形，可得：

$$\frac{i^{(m)}}{m}-\frac{d^{(m)}}{m}=\frac{i^{(m)}}{m}\cdot\frac{d^{(m)}}{m} \tag{1.1.26}$$

当 $m=1$ 时，有 $i-d=id$，这也就是每期计息一次时我们讨论的(1.1.15)式。

在推导上述有关等价利率的公式时，我们都是在一个度量期上用等价的定义来建

立等式。需要指出的是，对于复利和复贴现，以等价关系建立等式时并不要求在一个度量期上，而是可以任意选择时间区间。但对于单利和单贴现等其他类型的利率，不同时间区间上的等价率将不同。

【例 1-4】 年实际利率为 8%，求每年计息 2 次的年名义利率与每年计息 4 次的年名义贴现率。

解： 由名义利率与实际利率的关系可得：

$$\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{2}=1+i=1+8\%$$

因此，$i^{(2)}=[(1+8\%)^{\frac{1}{2}}-1]\times 2=7.85\%$

由名义利率与实际贴现率的关系可得：

$$\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4}=1+i=1+8\%$$

因此，$d^{(4)}=[1-(1+8\%)^{-\frac{1}{4}}]\times 4=7.62\%$

【例 1-5】 年名义利率为 6%，每年计息 4 次，求 1 万元投资三年后的积累值。

解： 由题意，可得：

$$A(3)=10000a(3)=10000\,(1+i)^{3}$$

因为 $(1+i)=\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{4}$，从而有

$$A(3)=10000\left(1+\frac{6\%}{4}\right)^{12}=10000\,(1.015)^{12}=11956.2(\text{元})$$

即 3 年后的积累值为 11956.2 元。

1.1.5 利息力

前面定义的各种利率度量了一段时间上的利息，我们还希望能够度量在时间点上的利率，也就是当时间区间无穷小时的利息度量。为此，我们引入**利息力**。

设在时刻 t 的积累值由总量函数 $A(t)$ 给出，定义 t 时刻的利息力为：

$$\delta_t=\frac{a'(t)}{a(t)}=\frac{A'(t)}{A(t)} \tag{1.1.27}$$

由定义可以看出，δ_t 为 t 时刻每一单位资金其积累值的变化率。

对式 (1.1.27) 变形后，就有：

$$\delta_t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln a(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln A(t) \tag{1.1.28}$$

对利息力 δ_t 从 0 到 t 积分，可得：

$$\int_0^t \delta_r\,\mathrm{d}r=\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ln A(r)\,\mathrm{d}r=\ln A(r)|_0^t=\ln\frac{A(t)}{A(0)}$$

从而，

$$a(t)=e^{\int_0^t \delta_r \mathrm{d}r} \tag{1.1.29}$$

另外，由式 (1.1.27) 可得

$$A(t)\delta_t=A'(t)$$

两边从 0 到 n 积分，就得：

$$\int_0^t A(t)\delta_t \,\mathrm{d}t=\int_0^t A'(t)\,\mathrm{d}t=A(t)|_0^t=A(n)-A(0) \tag{1.1.30}$$

对上式，可以理解为：$A(n)-A(0)$ 为 n 期内获得的利息，而微分表达式 $A(t)\delta_t\,\mathrm{d}t$ 可看成资金 $A(t)$ 在 t 时刻获得的利息，从 0 到 n 积分，即得到了 n 期内利息金额的另一个表达式。

【例 1-6】 $\delta_t=0.01t$，$0\leqslant t\leqslant 2$。确定投资 1000 元在第 1 年末的积累值和第 2 年内的利息金额。

解： 由题意，第一年末的积累值为：

$$A(1)=1000a(1)=1000e^{\int_0^1 \delta_t \mathrm{d}t}=1000e^{\int_0^1 0.01t\,\mathrm{d}t}=1000e^{0.005}=1005\ (元)$$

第二年内的利息金额为

$$\begin{aligned}I(1)&=A(2)-A(1)=1000a(2)-A(1)=1000e^{\int_0^2 \delta_t \mathrm{d}t}-A(1)\\&=1000(e^{0.02}-e^{0.005})=15.2\ (元)\end{aligned}$$

理论上，利息力 δ_t 可随 t 变化，但实际中利息力经常保持为常数，或在各个度量期上保持为常数。

假设利息力在每个度量期保持常数，δ_n 为从投资日算起的第 n 个时期上的常数利息力，即 $\delta_t\equiv\delta_n$，$n-1\leqslant t<n$，那么

$$a(t)=e^{\int_0^t \delta_r \mathrm{d}r}=e^{\int_0^1 \delta_r \mathrm{d}r}e^{\int_1^2 \delta_r \mathrm{d}r}\cdots e^{\int_{t-1}^n \delta_t \mathrm{d}r}=e^{\delta_1}e^{\delta_2}\cdots e^{\delta_t} \tag{1.1.31}$$

第 n 个度量期的实际利率为：

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=\frac{a(n)}{(n-1)}-1=e^{\delta_n}-1 \tag{1.1.32}$$

从而，在利率随度量期变化的情形下，积累函数可表示为：

$$a(t)=(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_t) \tag{1.1.33}$$

从(1.1.32)式可以看出，如果利息力在某时间区间上为常数，那么该时间区间上的实际利率也为常数。事实上，如在从 $n-1$ 到 n 之间 $\delta_t=\delta$ 为常数，就有

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=\frac{e^{n\delta}-e^{(n-1)\delta}}{e^{(n-1)\delta}}=e^{\delta}-1=i \tag{1.1.34}$$

从而就有：

$$e^{\delta}=1+i \tag{1.1.35}$$

$$\delta=\ln(1+i) \tag{1.1.36}$$

在复利下，如实际利率为常数，上式也可直接由利息力的定义式得到：

$$\delta_t = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t)}{a(t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+i)^t}{(1+i)^t} = \ln(1+i) = \delta$$

下式是将本节各种利息度量联系在一起的重要关系式：

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1+i = v^{-1} = (1-d)^{-1} = \left(1-\frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} = e^{\delta} \tag{1.1.37}$$

最后，我们再从导数与微分的角度进一步介绍常数的利息力。

由导数的定义可知：

$$\delta = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t)}{a(t)} = \lim_{h\to 0}\frac{a(t+h)-a(t)}{ha(t)} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+i)^{t+h}-(1+i)^t}{h(1+i)^t} \tag{1.1.38}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(1+i)^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} i^{\frac{1}{h}} = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} \tag{1.1.39}$$

其中 $m=1/h$，不妨令 m 取整数。

$i^{(m)}$ 是指每 $1/m$ 个度量期计息一次的名义利率，在 $1/m$ 个度量期的利息为 $i^{(m)}/m$，因此 δ 可理解为在无穷小时间段 $\mathrm{d}t$ 的利息为 $\delta\,\mathrm{d}t$。应用下式：

$$i^{(m)} = d^{(m)} + \frac{i^{(m)}\cdot d^{(m)}}{m}$$

从而

$$\delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\left[d^{(m)} + \frac{i^{(m)}\cdot d^{(m)}}{m}\right] = \lim_{m\to\infty} d^{(m)} \tag{1.1.40}$$

因此 δ 有时候也被称为贴现力。前面我们用积累函数定义利息力，其实也可以通过贴现函数来定义：

$$\delta_t = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)} \tag{1.1.41}$$

这里负号是为了保证利息力为正数，这是因为贴现函数是单减的。可以证明，使用贴现函数定义和使用积累函数定义利息力是等价的。

前面在复利和复贴现的情形下对利息力进行了探讨。对单利，类似地有：

$$\delta_t = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t)}{a(t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+it)}{1+it} = \frac{i}{1+it}, \quad t \geqslant 0 \tag{1.1.42}$$

对单贴现，就有：

$$\delta_t = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)} = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-dt)}{1-dt} = \frac{d}{1-dt}, \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{d} \tag{1.1.43}$$

可以看出，在单利情形下，δ_t 随 t 递减；在单贴现情形下，δ_t 随 t 递增。

理论上，最基本的利息度量方式就是利息力。但在实际中，实际的、名义的利率与

贴现率更常用，这些度量方式简单直观。不过，利息力也经常在部分计息周期较短的实务中被用来进行近似计算。

§1.2 利率问题求解

1.2.1 价值方程

利息理论的基本原则是：任何时刻资金的积累额依赖于其所经历的时间。对于过去已经支付的资金来说，要研究它在之后某给定时刻的积累值，它所经历的时间就是从支付日到该给定时刻，这是一个积累的过程；对于在未来支付的资金，要研究它在之前某给定时刻的价值，它所经历的时间是指从给定时刻到未来支付日的时间区间，这是一个折现的过程。

无论是考察积累值还是折现值，我们知道同一笔资金会因利息的原因，金额随时间变化，因而在不同时刻的金额不能直接比较，这就是**"货币的时间价值"**。承认货币的时间价值，这是利息理论的最基本假设，也是本书所有讨论的出发点。

为了比较不同时刻的金额，通常是将不同时刻的支付额积累或折现到同一时刻，再进行比较。一般地，要衡量在多个时刻支付额的总价值，首先要选取一个观察时刻，然后将所有支付额积累或折现到观察时刻，进而得到这些支付额在这一时刻的总价值。这个过程中，也是形成**"价值方程"**的过程。

通常，一个简单的利息问题（不涉及多次投资）包括以下四个基本量：

1. 投资期初的本金；
2. 投资时期的长度；
3. 利率；
4. 投资期末的本金积累值。

如果四个中已知其三，就可以建立一个价值方程，并进而确定第四个基本量。建立价值方程时，首先要确定观察时刻，可以选择更方便和易于计算的观察时刻，通常是选用投资期初或投资期末。在复利的情形中，不同观察时刻的选定不会影响求解结果。但需要注意，在单利和单贴现时，观察时刻的不同将导致解的不同。

【例 1-7】已知王某在第一年末支付 1000 元，在第三年末支付 4000 元，第七年末获得 10000 元，并在第八年末支付 X 元。如年利率为 6%，问王某应该在第八年支付多少，才能保证上述现金流在第八年末的积累值为 0?

解：设第八年末支付 X。如选取第八年末为观察时刻，就有价值方程：

$$1000\,(1+i)^7+4000\,(1+i)^5-10000(1+i)+X=0$$

解得：

$$X=10000(1.06)-4000(1.06)^5-1000(1.06)^7=3743.5\ (\text{元})$$

如选择第一年初为观察时刻，价值方程为：

$$1000(1+i)^{-1}+4000(1+i)^{-3}+X(1+i)^{-8}=10000(1+i)^{-7}$$

解得：

$$X=10000(1.06)^{-1}-4000(1.06)^{-3}-1000(1.06)^{-7}=3743.5\ (\text{元})$$

1.2.2 投资期的确定

在利息问题的求解中，我们以度量期作为时间单位，度量期为年度、半年度、季度等，都可以直接地用于计算。但在实际中，在投资期以天数计算时，往往涉及到计算天数和天数转化为年数的问题。通常，

年数 = 投资期天数/基础天数

在投资期不足一个度量期的情况下，通常使用单利计息，因此在非整数度量期时，利息金额可表示为：

利息 = 金额 × 利率 × 年数

这里的年数可以是非整数，常见的计算方式有以下三种。

1. **严格单利法**。这种方法严格按照日历计算天数，基础天数为所在年的实际总天数，投资期天数为实际经历的天数，这种做法考虑了闰年和各月天数不同的影响，主要在英国使用，因而也被称为**英国法**。

2. **常规单利法**。这种方式将一年中每月均视为 30 天，所以基础天数为确定的 360 天，而对于投资期天数，可以由如下公式计算：

$$\textbf{天数}=360(Y_2-Y_1)+30(M_2-M_1)+(D_2-D_1)$$

其中，Y_1、M_1、D_1 为投资期初的年份、月份和日期，Y_2、M_2、D_2 为投资期末的年份、月份和日期。

常规单利法常用于欧洲大陆国家，因此又被称为**欧洲大陆法**。因为该方法将每个月视为 30，因此又称为“30/360”法。

3. **银行家规则**。这一方法混合了严格单利法和常规单利法，对于投资天数按照投资的实际天数来算，而基础天数按照 360 天来算。由于 360 比实际天数要小，因此算出的投资时期往往比由其它方算出的要长，因而投资人更愿意用此方法。它也被称为**欧洲货币法**，是使用范围最广的一种方法。

应该注意，在计算投资天数时，一般不应把存款日和取款日都包括在内，而是只选择其中一个即可。但在实际中也会遇到把两者都包括在内的情况，这其实产生了额外一天的利息。

【例 1-8】在 3 月 1 日存入 1000 元，到同年的 11 月 15 日取出，利率为单利 8%。试确定利息金额：

(1) 按英国法；

(2) 按银行家规则。

解： (1) 天数为 $31+30+31+30+31+31+30+31+14=259$（天）

$$年数=\frac{259}{365}=0.71$$

利息为：$I=1000\times 8\%\times 0.71=56.8$（元）

(2) 天数为 259 天

$$年数=\frac{259}{360}=0.72$$

利息为：$I=1000\times 8\%\times 0.72=57.6$（元）

1.2.3 未知时期问题

前面我们介绍了价值方程和时间的度量。现在开始讨论未知投资时期长度，已知其余三个基本量，如何确定投资时间长度的问题。

对于一次支付的未知时间问题，可以直接写出价值方程。在数值求解时。可以使用计算器，简单快捷；也可以参考附录中的复利函数表，它包括常见的 v^n 和 $(1+i)^n$ 的值，以及后续各章将要介绍的函数的值；还可以进行级数展开，例如：

$$(1+i)^k=1+ki+\frac{k(k-1)}{2!}i^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}i^3+\cdots \tag{1.2.1}$$

$$e^{k\delta}=1+k\delta+\frac{(k\delta)^2}{2!}+\frac{(k\delta)^3}{3!}+\cdots \tag{1.2.2}$$

$$\ln(1+i)=i-\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}-\cdots \tag{1.2.3}$$

在(1.2.1)式中，如 k 为非整数，可以将其整数部分剥离开，对非整数部分保留级数展开后的前两项，也就是说，对整数时期使用复利，对非整数时期使用单利近似，即

$$(1+i)^{n+k}=(1+i)^n(1+i)^k\approx(1+i)^n(1+ki) \tag{1.2.4}$$

对贴现也可以处理为：

$$v^{n+k}=v^nv^k=v^n(1-d)^k\approx v^n(1-kd) \tag{1.2.5}$$

这种处理方式在实务中较为常见。

【例 1-9】以每月计息的年名义利率 12% 投资 1 万元，如积累到 3 万元，问需要几年时间？

解： 设需要 n 年的时间，那么价值方程为：

$$10000\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{n\times 12}=30000$$

化简后为 $(1.01)^{n\times 12}=3$，解得 $n=9.2$。

对于多次支付的情形，往往涉及到寻找等价的一次性支付时刻，也就是求时刻 t，使得在 t 时刻支付的金额等价于分别在 t_1，t_2，…，t_n 时刻支付的金额之和。价值方程为：

$$(s_1+s_2+\cdots+s_n)v^t=s_1v^{t_1}+s_2v^{t_2}+\cdots+s_nv^{t_n}$$

从而

$$t=\frac{\ln\left(s_1v^{t_1}+s_2v^{t_2}+\cdots+s_nv^{t_n}\right)-\ln\left(s_1+s_2+\cdots+s_n\right)}{\ln v} \tag{1.2.6}$$

上式有近似表达式：

$$\bar{t}=\frac{s_1t_1+s_2t_2+\cdots+s_nt_n}{s_1+s_2+\cdots+s_n}=\frac{\sum_{k=1}^{n}s_kt_k}{\sum_{k=1}^{n}s_k} \tag{1.2.7}$$

该近似可以理解为：用各次支付时间的加权平均值作为 t 的近似，记为 $\bar{t}$，其中各次支付的金额为权重。这种方法被称为**等时间法**。

可以证明：用等时间法得到的现值小于真实的现值，即：

$$(s_1+s_2+\cdots+s_n)v^{\bar{t}}<s_1v^{t_1}+s_2v^{t_2}+\cdots+s_nv^{t_n}$$

【例 1-10】计划在第一、三、五、八年末分别支付 200 元、400 元、300 元、600 元，假设实际年利率为 5%，试分别用 (1) 等时间法和 (2) 精确方法，确定一个支付 1500 元的时刻，使得这次支付与给定的一系列支付等价。

解：

（1）$\bar{t}=\dfrac{200\times1+400\times3+300\times5+600\times8}{1500}=\dfrac{77}{15}=5.13$

(2) 价值方程为：

$$1500v^t=200v+400v^3+300v^5+600v^8$$

$$v^t=\frac{200v+400v^3+300v^5+600v^8}{1500}=\frac{1177.17}{1500}=0.785$$

解得 $t=4.97$。

1.2.4 未知利率问题

前面我们考虑了投资期长度未知的情形，现在考虑利率未知的情形。在本金、投资期长度和积累值已知的情况下，建立价值方程，可以求解未知利率。对于只有单次支付的未知利率问题，可以用计算器获得数值解。但与投资期长度的计算不同，对于具有多次支付的未知利率问题，往往很难算出数值解，只有在比较特殊的情况时可以尝试采用代数法。

【例 1-11】 某人现在投资 3000 元，两年后再投资 6000 元，四年后这两笔投资积累至 15000 元，问实际利率是多少?

解： 由题意，价值方程如下：

$$3000(1+i)^4+6000(1+i)^2=15000$$

化简可得 $(1+i)^4+2(1+i)^2-5=0$。从而 $(1+i)^2=-1\pm\sqrt{6}$。由 $(1+i)^2>0$，可得 $(1+i)^2=\sqrt{6}-1\approx1.449$。最后解得 $i\approx20.4\%$。

上述例题为多次支付的情形，可以通过一些数学技巧求利率的数值解。更一般的确定未知利率的方法有下面两种：

1. **线性插值法**。线性插值法先利用复利表确定两个近似的利率值，使得真实值处于两个近似值之间，然后对两个近似值作线性插值，从而得到真实值的近似值。

【例 1-12】 现在投资 500 元，第一年末投资 300 元，第二年末再投资 150 元，第四年末将积累到 1300 元，求实际利率。

解： 由题意，价值方程如下：

$$500(1+i)^4+300(1+i)^3+150(1+i)^2=1300$$

令 $f(i)=500(1+i)^4+300(1+i)^3+150(1+i)^2-1300$。$f(i)=0$ 的解即为要求的实际利率。因为

$$f(0.1)=12.85$$

$$f(0.09)=-27.49$$

可知 i 的真实值介于 0.09 与 0.1 之间。

用线性插值，可得

$$i\approx 0.09+(0.1-0.09)\frac{0+27.49}{12.85+27.49}=0.0968=9.68\%$$

2. **迭代法**。迭代法实际上是多次进行线性插值，能够提升近似精度。

【例 1-13】 用迭代法重解例题1-11，使其精确到小数点后六位。

解： 例题1-11可得，i 的第一次近似值为 $i_1=0.0968$，而 $f(0.0968)=-0.1604$。

经计算得 $f(0.0969)=0.2447$。由于 $f(i)$ 单调递增，可知 i 的真实值位于 0.0968 与 0.0969 之间，用线性插值，可得

$$i\approx 0.0968+(0.0969-0.0968)\frac{0+0.1604}{0.2447+0.1604}=0.09684=9.684\%$$

继续上述步骤，就有

$$f(0.09684)=0.0016$$

$$f(0.09683)=-0.0389$$

所以 i 的真实值位于 0.09684 与 0.09683 之间。再次用线性插值，就有

$$i\approx 0.09683+(0.09684-0.09683)\frac{0+0.0389}{0.0016+0.0389}=0.0968396=9.68396\%$$

每迭代一次，精度至少增加一位小数，重复次数越多，精度越高。

线性插值法和迭代法是在多次支付情形中确定未知利率的常用方法，计算量较大，借助计算器将显得更简便有效。实际上现在已有很多软件可用于方程求根。

第 1 章 练习

1. 已知 $A(t)=2t+\sqrt{t}+5$，求

(1) 对应的 $a(t)$；

(2) I_3；

(3) i_4。

2. 证明：(1) $A(n)-A(m)=I_{m+1}+I_{m+2}+\cdots+I_n \quad (m<n)$

   (2) $A(n)=(1+i_n)\,A(n-1)$

3. (1) 如 i_k 是时期 k 的单利利率（$k=1,2,\cdots,n$），

   证明：$a(n)-a(0)=i_1+i_2+\cdots+i_n$。

   (2) 如 i_k 是时期 k 的复利利率（$k=1,2,\cdots,n$），

   证明：$A(n)-A(0)=I_1+I_2+\cdots+I_n$。

4. 证明：以当前时刻为 0 时刻，那么过去 n 期前投资的 1 元与未来 n 期后投资的 1 元的现值之和大于等于 2。

5. 对于 8% 的实际利率，求年计息四次的年名义贴现率。

6. 如果 $A(t)=ka^tb^{t^2}d^{e^t}$，其中 k，a，b，c，d 为常数，求 δ_t 的表达式。

7. 已知投资 500 元，3 年后得到 120 元的利息。试分别确定继续以该单利利率、复利利率投资 800 元在 5 年后的积累值。

8. 已知某笔投资在三年后积累值为 1000 元，第一年利率为 10%，第二年利率为 8%，第三年利率为 6%，求该笔投资的原始金额。

9. 基金 A 以每月计息一次的年名义利率 12% 积累，基金 B 以利息力 $\delta_t=t/6$ 积累，在时刻 $t=0$，两笔资金存入的款项相同，试确定两笔基金金额相等的下一时刻。

10. 基金 X 以利息力 $\delta_t=0.01t+0.1$ $(0\leqslant t\leqslant 20)$ 积累；基金 Y 以年实际利率 i 积累，每年计息 4 次。现在分别投资 1 元于基金 X、Y 中，20 年末两基金的积累值相同，求基金 Y 的年名义利率，以及在第 3 年末的积累值。

11. 两项基金 X 和 Y 以相同金额开始，且有：

    (1) 基金 X 以利息力 0.05 计息；

    (2) 基金 Y 以每半年计息一次的年名义利率 j 计息；

    (3) 在第八年末，基金 X 中的金额是 Y 中的 1.05 倍。

第 2 章 年金

学习目标

本章主要介绍年金的概念及几种年金的类型：标准型年金、永续年金、连续年金、变额年金等。同时，本章还介绍了年金问题的一些求解方法。

年金是一系列按照相同时间间隔支付的支付。生活中，年金常出现在零存整取的银行存款、购房按揭还款和购物分期付款等场景中，是金融中的重要概念。年金的最初形式是以一年为时间间隔支付的一系列款项，随着年金在实际生活中以及理论研究上的不断深入和扩展，时间间隔变得可长可短，理论上甚至可以是连续支付。年金中所涉及的其它方面，如支付额、利率等，也可能发生许多变化。最后，如果年金的给付与人的生存有关，此时的年金就变为生存年金，在保险领域中的养老金给付和分期缴付保费中有很多应用。值得注意的是，本章所述年金均为确定型年金（即年金的给付期数是确定的，与人的生死和其它风险没有关联），生存年金将在“寿险精算”中详细论述。

我们将付款时间间隔相同、每次支付额相同、整个付款期内利率不变、计息频率与支付频率相等的年金称为**标准型年金**，其它各种变化形式称为**一般型年金**。

§2.1 标准型年金

2.1.1 期末付年金

在每个付款期末支付的年金称为**期末付年金**。假设一个年金，付款期限为 n 期，每期期末支付额为 1，每期利率为 i。这种年金的付款形式如图 2-1 所示。所有支付额在时刻 0 的现值之和用符号 $a_{\overline{n}|}$ 表示，所有支付额在时刻 n 时的积累值之和用符号 $s_{\overline{n}|}$ 表示。

支付额		1	1	1	$\cdots$	1	1
时刻	0	1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n
价值	$a_{\overline{n}|}$						$s_{\overline{n}|}$

图 2-1

将每期期末的支付都按利率 i 折现到 0 时刻，对等比数列求和，即可得到 $a_{\overline{n}|}$ 的值：

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n = \frac{v(1-v^n)}{1-v} = \frac{1-v^n}{i} \tag{2.1.1}$$

将每期期末的支付都按利率 i 积累到时刻 n，求和可得 $s_{\overline{n}|}$ 的值：

$$s_{\overline{n}|}=(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots+(1+i)+1=\frac{(1+i)^n-1}{i} \tag{2.1.2}$$

(2.1.1)式可变形为

$$1=ia_{\overline{n}|}+v^n \tag{2.1.3}$$

这个公式的解释如下：左边是在时刻 0 的投资，右边是投资的回报方式。在时刻 0 投资额为 1 元，那么每期末都可获得利息 i，n 年利息的现值之和为 $ia_{\overline{n}|}$，到 n 年末收回投资本金 1，折现到时刻 0 时现值为 v^n。

(2.1.2)式可变形为

$$(1+i)^n=1+is_{\overline{n}|} \tag{2.1.4}$$

上式左边表示：在时刻 0 投资 1 单位本金，每期按复利 i 积累，在 n 期期末，积累值（本息和）为 $(1+i)^n$。上式右边表示：在时刻 0 投资本金为 1，每期期末产生利息 i，而每期产生的利息又以利率 i 再投资，这样到 n 期期末，积累值之和为 $is_{\overline{n}|}$，这部分是所产生利息的积累值，再加上投资本金 1，即为本息和。

$a_{\overline{n}|}$ 与 $s_{\overline{n}|}$ 的另一个关系式为：

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}=\frac{1}{s_{\overline{n}|}}+i \tag{2.1.5}$$

该关系式的含义是：设每期期末投资本金为 P，使得投资 n 期的本息和现值为 1，那么 $P=\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}$。时刻 0 时的 1 等价为 n 期末的本息和为 $(1+i)^n$。由式(2.1.4)可知本息和的另一表达式为 $1+is_{\overline{n}|}$，这与每期期末投资 P 的 n 期积累值是等价的，即

$$1+is_{\overline{n}|}=P\,s_{\overline{n}|}=\frac{1}{a_{\overline{n}|}}\,s_{\overline{n}|}$$

由此可得：

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}=\frac{1}{s_{\overline{n}|}}+i$$

通常 $a_{\overline{n}|}$ 和 $s_{\overline{n}|}$ 符号中不标出利率。在一个问题中涉及多个利率时，为避免引起混淆，可写作 $a_{\overline{n}|i}$ 和 $s_{\overline{n}|i}$，如 $a_{\overline{n}|0.06}$ 和 $s_{\overline{n}|0.08}$ 等。附录 1 将给出按某些利率计算得到的 $a_{\overline{n}|}$ 及 $s_{\overline{n}|}$ 的值。

【例 2-1】 设年利率为 6%。每年末投资 1000 元，计算投资 10 年的现值及积累值。

解： 由式(2.1.1)和式(2.1.2)可得：

年金现值为：$100\,a_{\overline{10}|0.06}=1000\times 7.36009=7360.09$(元)

年金积累值为：$100\,s_{\overline{10}|0.06}=1000\times 13.18080=13180.80$(元)

【例 2-2】 某银行客户想通过零存整取方式在 1 年后取 1 万元。在月复利为 0.5% 的情况下，每月末需存入多少钱，才能达到目标。

解： 设每月需存入 D 元，由题意有：

$$D\,s_{\overline{12}|0.005}=10000$$

$$D=\frac{10000}{s_{\overline{12}|0.005}}=\frac{10000}{12.3356}=810.66(\text{元})$$

2.1.2 期初付年金

在每个付款期初支付的年金称为**期初付年金**。如图2-2所示，假设一个 n 期年金，每期期初支付额为 1，每期利率为 i，所有支付额在时刻 0 的现值之和即为期初付年金现值，记为 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$，而所有支付额在时刻 n 的积累值之和用 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 表示。

支付额	1	1	1	1	$\cdots$	1	
时刻	0	1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n
价值	$\ddot{a}_{\overline{n}|}$						$\ddot{s}_{\overline{n}|}$

图 2-2

类似于期末付年金，就有以下公式：

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=1+v+v^2+\cdots+v^{n-2}+v^{n-1}=\frac{1-v^n}{d} \tag{2.1.6}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=(1+i)^n+(1+i)^{n-1}+\cdots+(1+i)^2+(1+i)=\frac{(1+i)^n-1}{d} \tag{2.1.7}$$

由 (2.1.6) 就得

$$1=d\ddot{a}_{\overline{n}|}+v^n \tag{2.1.8}$$

由 (2.1.7) 就得

$$(1+i)^n=d\ddot{s}_{\overline{n}|}+1 \tag{2.1.9}$$

另外还有

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=\ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n \tag{2.1.10}$$

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}+d \tag{2.1.11}$$

读者可以通过比较图2-1和图2-2得出 $a_{\overline{n}|}$ 与 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 及 $s_{\overline{n}|}$ 与 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 之间的关系：

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=a_{\overline{n}|}(1+i) \tag{2.1.12}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=s_{\overline{n}|}(1+i) \tag{2.1.13}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=a_{\overline{n-1}|}+1 \tag{2.1.14}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=s_{\overline{n+1}|}-1 \tag{2.1.15}$$

【例 2-3】在例 2−2 中，如存款改为在每月月初，其它条件不变。计算每月需存入的款项。

解： 设每月月初存款额为 D，由题意有：

$$D\ddot{s}_{\overline{12}|0.005}=10000$$

$$D=\frac{10000}{\ddot{s}_{\overline{12}|0.005}}=\frac{10000}{12.3972}=806.63(\text{元})$$

2.1.3 在任意时刻的年金值

前面计算了在时刻 0 的年金现值及时刻 n 的年金积累值。实务中经常遇到在任意时刻年金现值或积累值的计算问题，如延期年金的现值问题。

延期年金是以当前时刻为 0 时刻，在 0 时刻以后若干时期后开始按期支付的年金。一般而言，需要计算在以下三种时刻的年金价值：

（1）首期付款前某时刻的年金现值；

（2）最后一期付款后某时刻的年金积累值；

（3）付款期间某时刻年金的当前值。

下面通过一个例子来说明这三种时刻年金价值的计算。如图2-3所示，该年金支付次数为 5，首次支付发生在时刻 2，末次支付发生在时刻 6。在时刻 0 的年金现值就是延期年金现值，相当于（1）中的情况；在时刻 10 的年金积累值相当于（2）中的情况；在时刻 4 的年金当前值相当于（3）中的情况。另外，这 5 次支付在时刻 1 的现值是一个 5 期的期末付的年金现值即 $a_{\overline{5}|}$；在时刻 2 的年金现值是 $\ddot{a}_{\overline{5}|}$，在时刻 6 的年金积累值为 $s_{\overline{5}|}$，在时刻 7 的年金积累值为 $\ddot{s}_{\overline{5}|}$。

付款额			1	1	1	1	1				
时间点	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
价值		$a_{\overline{5}|}$	$\ddot{a}_{\overline{5}|}$				$s_{\overline{5}|}$	$\ddot{s}_{\overline{5}|}$			

图 2-3

下面对上述例子进行更一般的讨论。

1. 在首期付款前某时刻的年金现值。用 $V(0)$ 表示在时刻 0 的年金现值。在本例中，可以通过在时刻 1 或 2 的年金现值折现来计算，即：

$$V(0)=va_{\overline{5}|}\quad\text{或}\quad v^2\ddot{a}_{\overline{5}|}$$

$V(0)$ 也可表示为 $a_{\overline{6}|}-a_{\overline{1}|}$ 或 $\ddot{a}_{\overline{7}|}-\ddot{a}_{\overline{2}|}$。一般地，我们有：

$$v^m a_{\overline{n}|}=a_{\overline{m+n}|}-a_{\overline{m}|}\tag{2.1.16}$$

$$v^m \ddot{a}_{\overline{n}|}=\ddot{a}_{\overline{m+n}|}-\ddot{a}_{\overline{m}|}\tag{2.1.17}$$

2. 在最后一期付款后某时刻的年金积累值。此时，$V(10)$ 可视为在时刻 6 的期末付 5 期年金积累值的再次积累，即：

$$V(10)=s_{\overline{5}|}(1+i)^4$$

$V(10)$ 也可视为在时刻 7 的期初付 5 期年金的积累值的再次积累，即：

$$V(10)=\ddot{s}_{\overline{5}|}(1+i)^3$$

$V(10)$ 还可以表示为 $s_{\overline{9}|}-s_{\overline{4}|}$ 或 $\ddot{s}_{\overline{8}|}-\ddot{s}_{\overline{3}|}$。一般地，我们有：

$$(1+i)^m s_{\overline{n}|}=s_{\overline{m+n}|}-s_{\overline{m}|} \tag{2.1.18}$$

$$(1+i)^m \ddot{s}_{\overline{n}|}=\ddot{s}_{\overline{m+n}|}-\ddot{s}_{\overline{m}|} \tag{2.1.19}$$

3. 在付款期间某时刻年金的当前值。在时刻 4 的年金价值用 $V(4)$ 表示。$V(4)$ 可以通过计算所有付款在时刻 1 的现值再经过 3 期的积累得到，或者在时刻 2 的现值再经过 2 期的积累得到，即：

$$V(4)=a_{\overline{5}|}(1+i)^3=\ddot{a}_{\overline{5}|}(1+i)^2$$

$V(4)$ 也可以通过计算在时刻 6（或 7）的年金积累值，再经过 2 期（或 3 期）折现的现值，即：

$$V(4)=v^2 s_{\overline{5}|}=v^3\ddot{s}_{\overline{5}|}$$

$V(4)$ 还可通过将所有支付分解为两个年金，再将其现值与积累值相加得到。在时刻 4 的年金当前值可以视为一个 3 期期末付年金积累值与一个 2 期期末付年金现值之和，即：

$$V(4)=s_{\overline{3}|}+a_{\overline{2}|}$$

或一个 2 期期初付年金积累值与一个 3 期期初付年金现值之和，即：

$$V(4)=\ddot{s}_{\overline{2}|}+\ddot{a}_{\overline{3}|}$$

对上面的公式一般化，可得：

$$a_{\overline{n}|}(1+i)^m=v^{n-m}s_{\overline{n}|}=s_{\overline{m}|}+a_{\overline{n-m}|}\quad (m<n) \tag{2.1.20}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^m=v^{n-m}\ddot{s}_{\overline{n}|}=\ddot{s}_{\overline{m}|}+\ddot{a}_{\overline{n-m}|}\quad (m<n) \tag{2.1.21}$$

【例 2-4】某公司售出的年金（期末给付）有如下特征：

(a) 第 1 至第 5 年，每年给付 1 万元；

(b) 第 6 至第 9 年，每年给付 3 万元；

(c) 第 10 至第 12 年，每年给付 2 万元；

(d) 第 13 至第 20 年，每年给付 5 万元。

在预定利率为 4% 时，计算该年金的现值。

解：对于本例，可以分段求出现值再加总：

$$\begin{aligned}\text{年金现值}&=1\times a_{\overline{5}|}+3\times(a_{\overline{9}|}-a_{\overline{5}|})+2\times(a_{\overline{12}|}-a_{\overline{9}|})+5\times(a_{\overline{20}|}-a_{\overline{12}|})\\&=5a_{\overline{20}|}-3a_{\overline{12}|}+a_{\overline{9}|}-2a_{\overline{5}|}\\&=38.33(\text{万元})\end{aligned}$$

利用图形，读者可以快速地求出此类年金的现值，直接得出 $5a_{\overline{20}|}-3a_{\overline{12}|}+a_{\overline{9}|}-2a_{\overline{5}|}$ 这个结果。见下图：

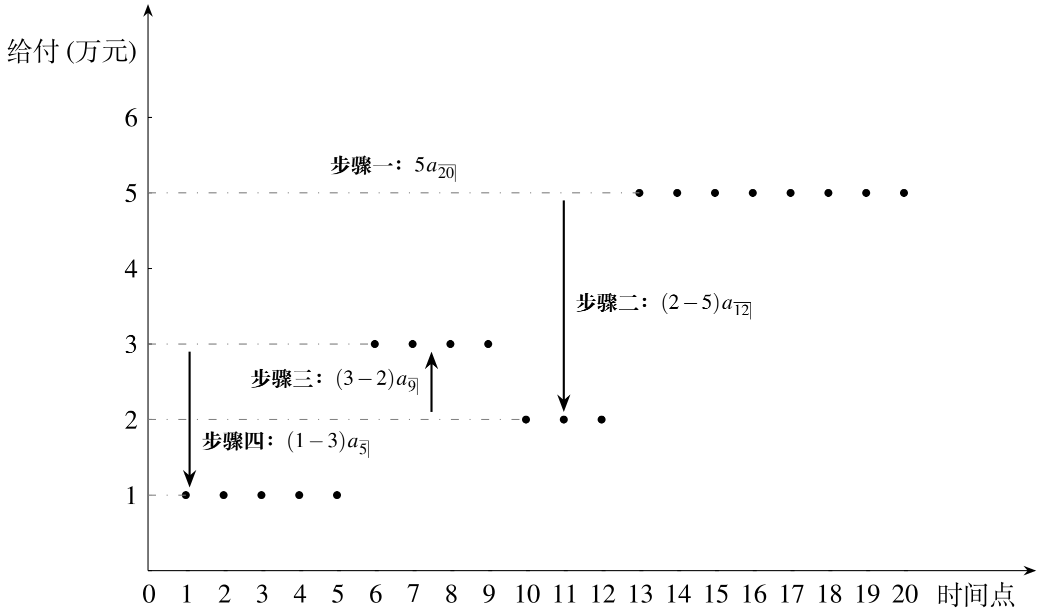

图 2-4

上图解释如下：首先，如果第 20 年及以前的每期给付都为 5 万元，那么年金现值为 $5a_{\overline{20}|}$（如图中“步骤一”所示）。然而，当回溯到第 12 年时，我们发现事与愿违：每期的给付是 2 万元而不是 5 万元。要是第 12 年及以前的每期给付都为 2 万元，使用 $5a_{\overline{20}|}$ 作为年金现值就多计算了 $3a_{\overline{12}|}$，因此要从 $5a_{\overline{20}|}$ 中减去 $3a_{\overline{12}|}$（如图中“步骤二”所示）。以此类推，就可以直接得到 $5a_{\overline{20}|}-3a_{\overline{12}|}+a_{\overline{9}|}-2a_{\overline{5}|}$ 这个结果。读者也可用几何法求面积的方式进行解释，也能得到同样的结论。

2.1.4 永续年金

前面介绍的年金，其支付次数是有限的。本节讨论支付次数没有限制、永远持续的年金，称为**永续年金**。其中一个重要的实际例子为股票分红。在不考虑破产的情况下，不可赎回优先股的分红给付可视为永续年金。如果某基金会以基金的利息从事某种事业，那么每期利息的支取会永远持续下去，这也是一种永续年金。

期末付永续年金的现值记为 $a_{\overline{\infty}|}$，就有：

$$a_{\overline{\infty}|}=\sum_{n=1}^{\infty}v^n=\frac{1}{i}\quad(i>0) \tag{2.1.22}$$

式(2.1.22)可以解释为在利率为 i 时，如首期期初投资 $\frac{1}{i}$，而且不收回本金，那么每期期末可获得额度为 $i\times\frac{1}{i}=1$ 的利息，一直持续下去。

期初付永续年金记为 $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$，就有：

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}=\sum_{n=0}^{\infty}v^n=\frac{1}{d} \tag{2.1.23}$$

永续年金的最终积累值会变得无穷大。

【例 2-5】某人去世后，保险公司将支付 10 万元的保险金，其 3 个受益人经协商，决定按永续年金方式领取该保险金。现将该永续年金分为三份：一份为第 1 – 10 年的年金，一份为第 11 – 20 年的年金，另一份为第 21 年及以后的年金，三个受益人各选择一份进行领取。所有的年金领取都在年初。在预定利率分别为 6.5% 和 3.5% 时，哪份年金的现值最大？

解：以利率 6.5% 为例，每年可领取的数额 $R = \dfrac{100000}{\ddot{a}_{\overline{\infty}|}} = 6103.29$(元)

第一份年金的现值 = $R \times \ddot{a}_{\overline{10}|} = 46727.42$(元)

第二份年金的现值 = $R \times (\ddot{a}_{\overline{20}|} - \ddot{a}_{\overline{10}|}) = 24892.92$(元)

第三份年金的现值 = $R \times (\ddot{a}_{\overline{\infty}|} - \ddot{a}_{\overline{20}|}) = 28379.72$(元)

此时第一份年金的现值最大。

当利率为 3.5% 时，三份年金的现值分别为 29108.10，20635.28 和 50256.55，此时第三份年金的现值最大。

2.1.5 年金的未知时期问题

前面介绍的年金问题都是求解年金价值或等额支付的额度。本节将介绍已知利率、各期支付额、在某一时刻的年金价值，求解支付期间数问题。一般来说，这种问题的解不一定恰好是整数，造成了非标准期（支付期长度不再是整数）问题。在实务中，通常的做法是在最后一次规则支付的额度上，加上根据等价原则计算出的零头，或在最后一期规则支付的下一期，支付根据等价原则计算出的零头。前一种方式的最后付款称为上浮式付款，后一种方式的最后付款称为扣减式付款。非标准期问题还可以通过第三种方式解决：对于期末付年金，可以在最后一期规则付款时点（设为 n）与下一期时点（$n+1$）之间的某时点 $n+k$ $(0<k<1)$ 支付一个额度为 R 的零头，其中：

$$R = 约定每期支付额 \times \frac{(1+i)^k - 1}{i}$$

下面以期末付年金为例，证明非标准期问题的第三种解决方式。假设年金的现值为 L，约定的每期支付额为 P，利率为 i，解出的支付期数 t 不为整数。把 t 写成整数部分与小数部分之和，$t = n+k$ $(0<k<1)$。定义非整数给付期数的年金现值为 $a_{\overline{n+k}|} = \dfrac{1-v^{n+k}}{i}$，那么

$$\begin{aligned}
L = Pa_{\overline{t}|} &= Pa_{\overline{n+k}|} \\
&= P\left(\frac{1-v^{n+k}}{i}\right) = P\left(\frac{1-v^n+v^n-v^{n+k}}{i}\right) \\
&= P\left(\frac{1-v^n}{i}\right) + P\left(\frac{v^n-v^{n+k}}{i}\right) \\
&= Pa_{\overline{n}|} + Pv^{n+k}\left(\frac{(1+i)^k-1}{i}\right)
\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

上面最后一式的第二项可以看成是在 $n+k$ 时的零头 R 在时刻 0 的现值。

类似地，对期初付年金，设最后一期规则付款时点为 $n-1$，那么可以在 $n-1+k$ 时支付 R 的零头，其中：

$$R = \text{约定每期付款额} \times \frac{(1+i)^k - 1}{d}$$

将式(2.1.24)两边消去 P，可得到一般的结论：

$$a_{\overline{n+k}|} = a_{\overline{n}|} + v^{n+k}\left(\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right) \tag{2.1.25}$$

需要指出，上述三种方式支付的零头一般是不相等的。这是因为当利率 $i \neq 0$ 时，在不同的时刻，年金的价值一般不同。

【例 2-6】 某人借款 5 万元用于购买住房，并计划每年年末还款 1 万元，直到还完。如按利率 7% 计算，求该借款人还款的整数次 n 以及最后的还款零头。零头的还款时间分别为：（1）与最后一次规则还款时间相同，即在时刻 n；（2）在 n 和 $n+1$ 之间；（3）在最后一次规则还款时间下一期，即在时刻 $n+1$。

解： 由题意有：

$$10000a_{\overline{n+k}|} = 50000, \quad a_{\overline{n+k}|} = 5$$

查表或计算，可得：$a_{\overline{6}|} = 4.767$，$a_{\overline{7}|} = 5.389$，因此 $n+k$ 应在 6 和 7 之间，整数付款次数为 6 次，设 f_1、f_2、f_3 分别为（1）、（2）、（3）所述的零头还款额。

（1）f_1 的计算。由 $10000a_{\overline{6}|} + f_1 \cdot v^6 = 50000$，计算得到：$f_1 = 3503.61$(元)

（2）f_2 的计算。由 $a_{\overline{6+k}|} = 5$，即有：$\dfrac{1-v^{6+k}}{i} = 5$。将 $i = 7\%$ 代入，解得 $k = 0.3670$。根据(2.1.24)式求得：

$$f_2 = 10000\frac{(1.07)^{0.367} - 1}{0.07} = 3591.70(\text{元})$$

（3）f_3 的计算。由 $10000a_{\overline{6}|} + f_3 \cdot v^7 = 50000$，计算得到：$f_3 = 3748.86$(元)

【例 2-7】 某人拟每年年末在银行存款 1000 元，希望在某年年末积累 1 万元的存款。设年利率为 4%。如需要零头存款，就发生在最后一次规则存款的下一期。计算有规则的存款次数和零头存款额。

解： 由年金积累公式有：

$$1000s_{\overline{n+k}|0.04} = 10000, \quad s_{\overline{n+k}|0.04} = 10$$

查表或计算，可得：$8 < n+k < 9$，因此需要有 8 次年末 1000 元的存款，根据题意零头存款发生在第 9 年年末，设零头存款额为 f，就有：

$$1000s_{\overline{8}|0.04} \times 1.04 + f = 10000$$

解得 $f = 417.20$(元)

2.1.6 年金的未知利率问题

本节介绍在已知付款期数 n、每期付款额、以及年金现值或积累值情况下的利率求解问题。在实务中，经常会遇到此类问题。如某人投资于企业优先股，优先股规定了各期的分红额，就可计算出该投资的利率。其它如贷款的分期偿还，在额度给定的条件下，可计算贷款利率问题。

对于 n 较小的年金，对未知利率问题，可直接通过解方程求利率。注意到：

$$a_{\overline{n}|}=v+v^2+\cdots+v^n$$

是一元 n 次方程，求出以 v 或 i 为自变量的一元 n 次方程的有效根，就可得到利率。

【例 2-8】 求利率 i，使得每年年初在银行存入 500 元，两年末可积累到 1200 元。

解： 由公式 $\ddot{s}_{\overline{2}|i}=(1+i)^2+(1+i)$，由题意得：

$$500\ddot{s}_{\overline{2}|i}=500[(1+i)^2+(1+i)]=1200$$

解得：

$$1+i=1.1279 \quad i=0.1279$$

另一个解 $1+i=-2.1279$ 与题意不符，应舍去。

对于 n 值较大的年金，对未知利率问题，传统上可先用泰勒展开，后用插值法求利率，或用迭代法求得数值解。但这些方法较为复杂，手工计算效率很低。下面的例子提供了两种效率较高的数值算法：试错--插值法、使用金融计算器。

【例 2-9】 假设年利率为 i，某人存入银行 8000 元，然后每年年末从银行支取 1000 元，共支取 10 年，恰好取完。计算 i 的值。

解： 由年金计算公式可得：

$$1000a_{\overline{10}|i}=8000 \quad a_{\overline{10}|i}=8$$

（1）试错--插值法。令 $f(i)=a_{\overline{10}|i}-8$，为了找到 $f(i)=0$ 的解，我们希望找到尽可能接近的 i_1 和 i_2，使得 $f(i_1)$ 和 $f(i_2)$ 异号。查表知：$a_{\overline{10}|0.04}=8.1109$，$a_{\overline{10}|0.045}=7.9127$，等价地：

$$f(0.04)=0.1109,\ f(0.045)=-0.0873$$

利用线性插值，可得：

$$i=0.04+0.005\frac{0.1109}{0.1109+0.0873}=0.0428$$

如果读者使用的计算器带有函数计算功能，就可以直接将 $f(i)$ 的具体函数形式 $\dfrac{1-(1+i)^{-10}}{i}-8$ 输入计算器，通过试错也可得到相似的结果。

（2）使用金融计算器。金融计算器已经内嵌解方程所需的数值算法，可以快速求解未知利率问题。从存款人的角度来看，支取年限为 10，现值为 -8000（"存款" 操作在存款人角度上是支出），每期取得 1000，终值为 0（最终恰好支取完）。将上述参数输入金融计算器，步骤如下所示：

1	0	N	8	0	0	0	+ | –	PV	1
0	0	0	PMT	0	FV	CPT	I/Y		

金融计算器显示的最终结果为 4.277%。实际上，目前已有很多软件，通过调用函数或编程求得利率。

§2.2 一般型年金

上一节介绍了标准型年金，本节将介绍标准型年金的各种变化，如利率的变化、计息期或计息频率的变化、支付频率的变化等，这些年金统称为**一般型**年金。

2.2.1 变利率年金

在标准型年金中，整个付款期内的利率是不变的。这里将介绍变利率下年金。一般有两种利率变动方式：

1. 各付款期的利率不同。如在第一个付款期利率为 i_1，第二个付款期利率为 i_2，…，设每次付款额为 1，那么对期末付年金，所有付款的年金现值为：

$$\begin{aligned} a(n) &= (1+i_1)^{-1} + (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1} + \cdots + (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}\cdots(1+i_n)^{-1} \\ &= \sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t}(1+i_s)^{-1} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

年金积累值为：

$$\begin{aligned} s(n) &= 1 + (1+i_n) + (1+i_n)(1+i_{n-1}) + \cdots + (1+i_n)\cdots(1+i_1) \\ &= \sum_{t=1}^{n}\prod_{s=0}^{t-1}(1+i_{n-s+1}) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

在上式中记 $i_{n+1}=0$。相应的 $\ddot{a}(n)$ 及 $\ddot{s}(n)$ 的表达式可类似得出。

2. 各次付款所对应的利率不同。如第一次付款的利率为 i_1，那么 1 单位期末付款在时刻 0 的现值为 $(1+i_1)^{-1}$，在时刻 n 的积累值为 $(1+i_1)^{n-1}$；第二次付款的利率为 i_2，那么 1 单位期末付款在时刻 0 的现值为 $(1+i_2)^{-2}$，在时刻 n 的积累值为 $(1+i_2)^{n-2}$，…

这种年金的现值为：

$$a(n) = (1+i_1)^{-1} + (1+i_2)^{-2} + \cdots + (1+i_n)^{-n} = \sum_{t=1}^{n}(1+i_t)^{-t} \tag{2.2.3}$$

积累值为：

$$s_{\overline{n}|} = (1+i_1)^{n-1} + (1+i_2)^{n-2} + \cdots + (1+i_n) + 1 = \sum_{t=1}^{n}(1+i_t)^{n-t} \tag{2.2.4}$$

相应的 $\ddot{a}(n)$ 及 $\ddot{s}(n)$ 的可类似得出。

现实中，以上两种利率变动方式下的年金都是存在的。最常见的例子是银行存款利率的变动对年金的影响。对一个每年都存入给定额度的投资者，对各次存款有两种处理方法，一种是每次存款以每年的利率计算积累值；另一种是每次存款在未来时间内都按存款时的利率计算积累值。

【例 2-10】某人每年年初存入银行 1000 元钱，前 4 年的年利率为 6%，后 6 年的年利率升到 10%。计算第 10 年末的存款积累值。

解：前 4 期存款在第 4 年末的积累值为：

$$1000\ddot{s}_{\overline{4}|0.06} = 4637.09(\text{元})$$

该积累值再按 10% 年利率积累到第 10 年末，积累值为：

$$4637.09\,(1.1)^6 = 8214.89(\text{元})$$

后 6 年的存款在第 10 年末的积累值为：

$$1000\ddot{s}_{\overline{6}|0.1} = 8487.17(\text{元})$$

因此，所有存款在第 10 年末的积累值为：

$$8214.89 + 8487.17 = 16702.06(\text{元})$$

2.2.2 付款频率与计息频率不同的年金

在上一节的所有例子中，付款频率与计息频率相同：如每年存入或给付（付款频率为 1 次/年），利率为年利率（计息频率为 1 次/年）；如年金为每月存入或给付（付款频率为 12 次/年），利率为月利率（计息频率为 12 次/年）。但在现实生活中，付款频率常常与计息频率不同。如只是为了计算出年金现值或积累值的数值结果，那么可以利用第一章中的利率转换方式，将与付款频率不同的计息频率下的利率，转换为与付款频率相同的计息频率下的利率，使之变为标准型年金，然后计算年金现值或积累值。

【例 2-11】某购房贷款 8 万元，每月初还款一次，分 10 年还清，每次还款额相等。贷款年利率为 10.98% ，计算每次还款额。

解：根据给定的年实际利率，计算出月实际利率 j，由 $1+0.1098=(1+j)^{12}$，得到 $j=0.008719$。设每次还款额为 R，那么

$$R\ddot{a}_{\overline{120}|j} = 80000$$

$$R = \frac{80000}{\ddot{a}_{\overline{120}|j}} = 1068.52(\text{元})$$

因此，每月初需还款 1068.52 元。

当付款频率与计息频率不同时，如果不仅要求计算年金积累值或现值，而且要有年金符号表示，并便于进行分析，那就需要采用下面的方法。这些方法不是通过利率的转换，而是通过标准年金符号来表示。付款频率可以大于计息频率，也可以小于计息频率。在这两种情形中，具体的年金计算方法及最后的表达式差别较大，所以下面按照两种不同情形分别介绍。

1. 付款频率低于计息频率的年金

（1）期末付年金。设每个付款期内计息 k 次，共计息 n 次，因此付款次数为 $\dfrac{n}{k}$。令每个计息期的利率为 i，并假设 n、k 和 $\dfrac{n}{k}$ 都为整数。在这种情形下，每次付款额为 1 的年金，现值为：

$$
\begin{aligned}
v^k + v^{2k} + \cdots + v^n &= \frac{v^k - v^{n+k}}{1 - v^k} = \frac{1 - v^n}{(1+i)^k - 1} \\
&= \frac{1 - v^n}{i} \frac{i}{(1+i)^k - 1} = \frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}
\end{aligned}
\tag{2.2.5}
$$

年金积累值为：

$$
(1+i)^{n-k} + (1+i)^{n-2k} + \cdots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^k - 1} = \frac{s_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}} \tag{2.2.6}
$$

下面，我们使用另一种更直观的方式推导上述的结论。设想有一个等价于原年金的期末付年金，其在每个计息期（而不是每个付款期）末都支付 R，那么原年金的现值可以简单表示成 $Ra_{\overline{n}|}$。观察图2-5可得，计息期期末付款额 R 满足：

$$
R \cdot s_{\overline{n}|} = 1, \qquad R = \frac{1}{s_{\overline{n}|}}
$$

将 $R = \dfrac{1}{s_{\overline{n}|}}$ 代入 $Ra_{\overline{n}|}$，那么年金现值为 $\dfrac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}$，即(2.2.5)式。同样，也可求得年金积累值 $R \cdot s_{\overline{n}|} = \dfrac{s_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}$，即(2.2.6)式。

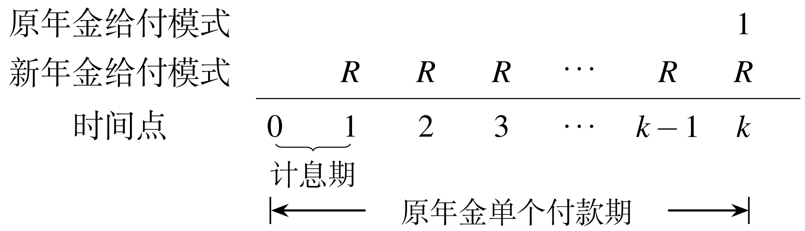

图 2-5

（2）期初付年金。这种年金与（1）中相比，只是每次支付发生在期初，即从时刻 0 开始付款，每隔 k 个计息期付款一次，年金现值如下：

$$
1 + v^k + v^{2k} + \cdots + v^{n-k} = \frac{1 - v^n}{1 - v^k} = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{k}|}} \tag{2.2.7}
$$

年金积累值如下：

$$
(1+i)^n + (1+i)^{n-k} + \cdots + (1+i)^k = \frac{(1+i)^n - 1}{1 - v^k} = \frac{s_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{k}|}} \tag{2.2.8}
$$

将每次付款额 1 看成是在每个付款期包含的 k 个计息期，期初付款额为 R 的 k 期年金的现值，也可得到上面两式。

（3）其它形式的付款频率小于计息频率的情况。在（1）中的给付方式下，如整个付

款期是无限的，即年金为永续年金，那么期末付永续年金的现值为：

$$v^k+v^{2k}+\cdots=\frac{v^k}{1-v^k}=\frac{1}{(1+i)^k-1}=\frac{1}{is_{\overline{k}|}} \tag{2.2.9}$$

上式也可写为 $\dfrac{a_{\overline{\infty}|}}{s_{\overline{k}|}}$。相应的期初付永续年金的现值为 $\dfrac{1}{ia_{\overline{k}|}}$ 或 $\dfrac{a_{\overline{\infty}|}}{a_{\overline{k}|}}$。

另一种情况是每个计息期内为连续计息的情况，即按照常数利息力 δ 计息。计算年金的现值和积累值时，利用利息力与利率的转换关系：

$$1+i=e^{\delta},\ v=e^{-\delta}$$

年金的现值表达式为：

$$e^{-k\delta}+e^{-2k\delta}+\cdots+e^{-n\delta}$$

年金积累值的计算类似得到。

【例 2-12】某人 1 月 1 日在银行存入 1 万元，每季末从银行领取 500 元，直到余额经一个季度积累的本息和不够一次领取额为止，余额在最后一次足额领取时一并支出。设月利率为 $i=0.005$，计算足额领取次数和不足额部分。

解： 由式(2.2.5)有：

$$500\frac{a_{\overline{n}|0.005}}{s_{\overline{3}|0.005}}=10000$$

因此 $a_{\overline{n}|0.005}=20s_{\overline{3}|0.005}=60.3$。计算得：$71<n<72$。因此，足额领取次数为：$\left[\dfrac{71}{3}\right]=23$。

设不足额部分为 E，就有：

$$Ev^{69}+500\cdot\frac{a_{\overline{69}|0.005}}{s_{\overline{3}|0.005}}=10000$$

$$E=483.45(\text{元})$$

2. 付款频率高于计息频率的年金。

以下按期末付年金、期初付年金、及其它各种形式的情形分别说明。

（1）期末付年金。设每个计息期内付款 m 次，n 为计息期数，i 为每个计息期的利率，m、n 为正整数，那么总的付款次数为 mn。假设每个付款期期末付款额为 $\dfrac{1}{m}$，而不是单位额度 1，每个计息期付款为 $m\cdot\dfrac{1}{m}=1$。这钟年金的支付模式如图2-6所示。

一个完整计息期

付款额	0	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$	$\cdots$	$\frac{1}{m}$	$\cdots$	$\frac{1}{m}$	$\cdots$	$\frac{1}{m}$
时间点	0	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	n
价值	$a_{\overline{n}\vert}^{(m)}$								$s_{\overline{n}\vert}^{(m)}$

图 2-6

上述年金在时刻 0 的现值记为 $a_{\overline{n}|}^{(m)}$。根据假设条件，就有：

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{1}{m}\left(v^{\frac{1}{m}}+v^{\frac{2}{m}}+\cdots+v^{n-\frac{1}{m}}+v^{n}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{v^{\frac{1}{m}}-v^{n+\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right)=\frac{1-v^{n}}{i^{(m)}}
\end{aligned} \tag{2.2.10}
$$

在时刻 n 的年金积累值记为 $s_{\overline{n}|}^{(m)}$，就有：

$$
s_{\overline{n}|}^{(m)}=a_{\overline{n}|}^{(m)}(1+i)^{n}=\frac{(1+i)^{n}-1}{i^{(m)}} \tag{2.2.11}
$$

比较式(2.2.10)、(2.2.11)与式(2.1.1)、(2.1.2)，可以看出，公式的差别在于分母。

显然，

$$
a_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{1-v^{n}}{i^{(m)}}=\frac{1-v^{n}}{i}\cdot\frac{i}{i^{(m)}}=\frac{i}{i^{(m)}}a_{\overline{n}|} \tag{2.2.12}
$$

$$
s_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{i}{i^{(m)}}s_{\overline{n}|} \tag{2.2.13}
$$

以上两式表明了付款频率大于计息频率的年金形式与标准年金形式之间的转换关系；可以用利用转换关系，通过利息表中的标准年金的数值来计算这种形式复杂的年金的现值与积累值。

（2）期初付年金。每期期初付款 $\dfrac{1}{m}$，每个计息期付款 m 次，共 n 个计息期的年金，现值记为 $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$，就有：

$$
\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{1-v^{n}}{d^{(m)}} \tag{2.2.14}
$$

该年金的积累值记为 $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}$，就有：

$$
\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{(1+i)^{n}-1}{d^{(m)}} \tag{2.2.15}
$$

同样，也可用 $a_{\overline{n}|}$ 和 $s_{\overline{n}|}$ 来表示 $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ 和 $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$：

$$
\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{i}{d^{(m)}}a_{\overline{n}|} \tag{2.2.16}
$$

$$
\ddot{s}_{\overline{n}|}=\frac{i}{d^{(m)}}s_{\overline{n}|} \tag{2.2.17}
$$

由于 $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ 与 $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ 只相差一个付款期，一个付款期的积累因子为 $(1+i)^{\frac{1}{m}}$，因此就有：$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}=(1+i)^{\frac{1}{m}}a_{\overline{n}|}^{(m)}$，应用 i 和 $i^{(m)}$ 的关系，就有：

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} &= (1+i)^{\frac{1}{m}}a_{\overline{n}|}^{(m)} \\
&= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)\frac{i}{i^{(m)}}a_{\overline{n}|}=\left(\frac{i}{i^{(m)}}+\frac{i}{m}\right)a_{\overline{n}|}
\end{aligned} \tag{2.2.18}
$$

同理有：

$$
\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}=\left(\frac{i}{i^{(m)}}+\frac{i}{m}\right)s_{\overline{n}|} \tag{2.2.19}
$$

通过与式(2.1.5)与(2.1.11)相比较，可以证明下列结果：

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}^{(m)}}=\frac{1}{s_{\overline{n}|}^{(m)}}+i^{(m)} \tag{2.2.20}$$

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}}=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}}+d^{(m)} \tag{2.2.21}$$

（3）其它形式的付款频率大于计算频率的情形。这种情形下的永续年金的现值记为 $a_{\overline{\infty}|}^{(m)}$ 与 $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}$，表示如下

$$a_{\overline{\infty}|}^{(m)}=\frac{1}{i^{(m)}} \tag{2.2.22}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}=\frac{1}{d^{(m)}} \tag{2.2.23}$$

【例 2-13】某人在退休前 5 年，每季度末将 2000 元存入银行账户，直到退休（在某年 1 月 1 日退休）。银行年利率为 $i=0.06$，写出该职工在退休 6 年后的存款积累值的表达式（利用利率 i 的年金符号）。

解： 表达式为 $4\times 2000s_{\overline{5}|0.06}^{(4)}(1+i)^6=8000\left(s_{\overline{11}|0.06}^{(4)}-s_{\overline{6}|0.06}^{(4)}\right)$

2.2.3 连续年金

当付款频率变得非常大时，付款就连续付款，在时刻 t 的付款量为 $\mathrm{d}t$，对应的年金为连续年金。虽然这种年金在实务中不存在，但它在年金的理论分析和寿险精算中应用广泛。

连续付款 n 个计息期，每个计息期的付款额之和为 1 的年金，现值记为 $\bar{a}_{\overline{n}|}$，

$$\bar{a}_{\overline{n}|}=\int_0^n v^t\,\mathrm{d}t \tag{2.2.24}$$

v^t 为从时刻 t 到时刻 0 的折现因子，$\mathrm{d}t$ 为时刻 t 的付款额，$v^t\,\mathrm{d}t$ 为时刻 t 的付款额在时刻 0 的现值。化简(2.2.24)式，就有：

$$\bar{a}_{\overline{n}|}=\left.\frac{v^t}{\ln v}\right|_0^n=\frac{1-v^n}{\delta} \tag{2.2.25}$$

连续年金的积累值记为 $\bar{s}_{\overline{n}|}$：

$$=\bar{s}_{\overline{n}|}=\int_0^n(1+i)^{n-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^n(1+i)^t\,\mathrm{d}t \tag{2.2.26}$$

由上式计算可得：

$$\bar{s}_{\overline{n}|}=\frac{(1+i)^n-1}{\delta} \tag{2.2.27}$$

比较式(2.2.25)与式(2.1.1)、(2.1.6)、(2.2.10)与(2.2.14)，可以发现各式分子是相同的，分母的差别对应于付款方式的不同。

由 $\bar{a}_{\overline{n}|}$ 的实际意义，可通过求 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{\overline{n}|}^{(m)}$ 来得到 $\bar{a}_{\overline{n}|}$ 的表达式如下：

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} a_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-v^n}{i^{(m)}} = \frac{1-v^n}{\delta}$$

这个极限也是 $\lim\limits_{m\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$：

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-v^n}{d^{(m)}} = \frac{1-v^n}{\delta}$$

同样，$\bar{s}_{\overline{n}|}$ 可通过求 $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\overline{n}|}^{(m)}$ 及 $\lim\limits_{m\to\infty} \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}$ 得到：

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} s_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^n-1}{i^{(m)}} = \frac{(1+i)^n-1}{\delta}$$

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^n-1}{d^{(m)}} = \frac{(1+i)^n-1}{\delta}$$

容易计算得到 $\bar{s}_{\overline{n}|}$ 的微分方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}\,\bar{s}_{\overline{t}|}}{\mathrm{d}t} = (1+i)^t = 1+\delta\bar{s}_{\overline{t}|} \tag{2.2.28}$$

(2.2.28)式解释了 $\bar{s}_{\overline{t}|}$ 关于 t 的变化率的构成：一方面，它等于 $(1+i)^t$；另一方面，这一变化率由两部分组成：一部分是连续付款率 1；另一部分是在 t 时刻的积累值 $\bar{s}_{\overline{t}|}$ 所产生的利息强度 $\delta\bar{s}_{\overline{t}|}$。

2.2.4 基本变化年金

下面介绍每期付款额不同的年金形式。假设每次付款期利率相同。一般给定各期利率、付款期间、每次付款额，可计算出相应年金的现值和积累值。但这里只介绍每次付款额有规律的变化，以求出相应年金的现值和积累值的表达式。

1. 各期付款额为等差数列。如某期末付年金首期付款额为 P，从第二期开始，每期付款额比上一期增加 Q，共有 n 个付款期，每个付款期利率为 i。只考虑付款额大于 0 的年金，要求 $P>0$，$P+(n-1)Q>0$。该年金的现值为：

$$V(0) = Pv+(P+Q)v^2+(P+2Q)v^3+\cdots+[P+(n-1)Q]v^n$$

该现值可通过以下方法求解：

$$(1+i)V(0) = P+(P+Q)v+(P+2Q)v^2+\cdots+[P+(n-1)Q]v^{n-1}$$

用后面的式子减去前面式子，就得：

$$iV(0) = P+Qv+Qv^2+\cdots+Qv^{n-1}-Pv^n-(n-1)Qv^n$$

$$V(0) = P\cdot\frac{1-v^n}{i}+Q\cdot\frac{a_{\overline{n}|}-nv^n}{i} = Pa_{\overline{n}|}+Q\frac{a_{\overline{n}|}-nv^n}{i} \tag{2.2.29}$$

该年金的积累值为：

$$V(n) = V(0)(1+i)^n = P\cdot s_{\overline{n}|}+Q\cdot\frac{s_{\overline{n}|}-n}{i} \tag{2.2.30}$$

对于首期付款额为 P，以后每期付款额比上一期增加 Q 的期末付永续年金的现值，就有：

$$\lim_{n\to\infty}\left(Pa_{\overline{n}|}+Q\frac{a_{\overline{n}|}-nv^n}{i}\right)=P\cdot\frac{1}{i}+\frac{Q}{i}\left(\frac{1}{i}\right)=\frac{P}{i}+\frac{Q}{i^2} \tag{2.2.31}$$

下面考虑两种特例。

（1）当 $P=1$，$Q=1$ 时，年金的现值用符号 $(Ia)_{\overline{n}|}$ 表示，由(2.2.29)式可得：

$$\begin{aligned}(Ia)_{\overline{n}|}&=\frac{1-v^n}{i}+\frac{a_{\overline{n}|}-nv^n}{i}\\&=\frac{a_{\overline{n}|}+1-(n+1)v^n}{i}=\frac{\ddot{a}_{\overline{n+1}|}-(n+1)v^n}{i}\\&=\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{i}\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

相应地年金的积累值记为 $(Is)_{\overline{n}|}$，

$$\begin{aligned}(Is)_{\overline{n}|}&=(Ia)_{\overline{n}|}(1+i)^n\\&=\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{i}(1+i)^n=\frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}-n}{i}\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

此外，(2.2.32)式也可按下面方法得到：从第一期起每期期末付款额为 1 的年金在时刻 0 的现值，加上从第二期起每期末付款额为 1 的年金在时刻 0 的现值，以此类推，就有：

$$\begin{aligned}(Ia)_{\overline{n}|}&=\sum_{t=0}^{n-1}v^t a_{\overline{n-t}|}=\sum_{t=0}^{n-1}v^t\,\frac{1-v^{n-t}}{i}\\&=\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{i}\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

（2）当 $P=n$、$Q=-1$ 时，年金的现值用符号 $(Da)_{\overline{n}|}$ 表示，由(2.2.29)式可得：

$$\begin{aligned}(Da)_{\overline{n}|}&=na_{\overline{n}|}-\frac{a_{\overline{n}|}-nv^n}{i}\\&=\frac{n-nv^n-a_{\overline{n}|}+nv^n}{i}=\frac{n-a_{\overline{n}|}}{i}\end{aligned} \tag{2.2.35}$$

相应地年金的积累值记为 $(Ds)_{\overline{n}|}$，

$$(Ds)_{\overline{n}|}=(Da)_{\overline{n}|}(1+i)^n=\frac{n(1+i)^n-s_{\overline{n}|}}{i} \tag{2.2.36}$$

(2.2.35)式也可看成 n 个期末付年金的现值之和：

$$(Da)_{\overline{n}|}=\sum_{t=1}^{n}a_{\overline{t}|}=\sum_{t=1}^{n}\frac{1-v^t}{i}=\frac{n-a_{\overline{n}|}}{i}$$

对于期初付年金，只需将相应公式分母中的 i 改为 d 即可。

【例 2-14】 现有一期末付年金，共支付 9 年，其每年支付额分别为 1、2、3、4、5、4、3、2、1（单位：万元），年利率为 4%。使用年金的符号表示并计算该年金的现值。

解： 该年金的现值可表示为：

$$V(0)=(Ia)_{\overline{5}|0.04}+(Da)_{\overline{4}|0.04}v^5$$
$$=\frac{\ddot{a}_{\overline{5}|0.04}-5(1.04)^{-5}}{0.04}+\frac{4-a_{\overline{4}|0.04}}{0.04}(1.04)^{-5}=20.61(\text{万元})$$

对于形如例2-14的年金，其各年付款额先由 1 到 n 递增，然后再由 $n-1$ 到 1 递减，称为**期末付虹式年金**。如最大付款额 n 连续出现 2 次（即年付款额先由 1 到 n 递增，然后再由 n 到 1 递减），这种年金称为**期末付平顶虹式年金**。

期末付虹式年金的现值为：

$$V(0)=(Ia)_{\overline{n}|}+v^n(Da)_{\overline{n-1}|} \tag{2.2.37}$$

期末付平顶虹式年金的现值为：

$$V(0)=(Ia)_{\overline{n}|}+v^n(Da)_{\overline{n}|} \tag{2.2.38}$$

2. 各期付款额成等比数列关系。如某期末付年金各期付款额成等比数列，即各期付款额为：1，$(1+k)$，$(1+k)^2$，$\cdots$，$(1+k)^{n-1}$，那么该年金的现值为：

$$V(0)=v+v^2(1+k)+v^3(1+k)^2+\cdots+v^n(1+k)^{n-1}$$
$$=v\left\{\left[1+\frac{1+k}{1+i}+\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^{n-1}\right]\right\}$$
$$=v\left\{\left[\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)}\right]\right\}=\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k},\quad (i\neq k) \tag{2.2.39}$$

如 $i=k$，就有：

$$V(0)=nv=\frac{n}{1+i} \tag{2.2.40}$$

当 $n\to\infty$ 时，上述年金变为永续年金。当 $\frac{1+k}{1+i}<1$，即 $k<i$ 时，可以计算出该年金的现值；当 $\frac{1+k}{1+i}>1$，即 $k>i$ 时，(2.2.39)式发散，$V(0)$ 不存在；从(2.2.40)式可见，当 $k=i$ 时的永续年金的现值也是不存在的。

2.2.5 更一般变化年金

这里考虑年金更一般的变化形式，即在基本的递增年金的基础上，付款频率大于或小于计息频率的形式。虽然在实务中这种情形很少见，但在理论上有一定意义，其它变化形式可参照这里的计算原理。

1. 付款频率低于计息频率的形式。设某年金共有 $n=km$ 个计息期，每 k 个计息期末付款 1 次，n 个计息期共付款 m 次，每次付款比前一次增加 1，那么这种年金的现值

为：

$$
\begin{aligned}
V(0) &= v^k + 2v^{2k} + \cdots + (m-1)v^{(m-1)k} + mv^{mk} \\
&= v^k + 2v^{2k} + \cdots + \left(\frac{n}{k}-1\right)v^{n-k} + \frac{n}{k}v^n
\end{aligned}
$$

两边同乘以 $(1+i)^k$，可得：

$$
(1+i)^k V(0) = 1 + 2v^k + \cdots + \left(\frac{n}{k}-1\right)v^{n-2k} + \frac{n}{k}v^{n-k}
$$

后式减去前式，得到：

$$
V(0)\left[(1+i)^k - 1\right] = 1 + v^k + v^{2k} + \cdots + v^{n-k} - \frac{n}{k}v^n
$$

$$
V(0) = \frac{\dfrac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}} - \dfrac{n}{k}v^n}{is_{\overline{k}|}} \tag{2.2.41}
$$

当 $k=1$ 时，上式就变为(2.2.32)式的形式。

2. 付款频率高于计息频率的等差递增型年金。这种年金分为两种情形：

（1）付款额在每个计息期增加一次的年金。这种年金每个计息期内的 m 次付款额相同，在下个计息期内付款额增加，增加幅度为 $\dfrac{1}{m}$，因此增加后本计息期付款总额要比上一计息期付款总额增长 1 个单位。这种年金的给付模式如图2-7所示：

	$\overbrace{\quad 0 \quad \frac{1}{m} \quad \frac{1}{m} \quad \cdots \quad}^{\text{一个完整计息期}}$					$\xrightarrow{\text{增加 } \frac{1}{m}}$				
付款额	0	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$	$\cdots$	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	$\cdots$	$\frac{2}{m}$	$\cdots$	$\frac{n}{m}$
时间点	0	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	$\cdots$	1	$\frac{m+1}{m}$	$\cdots$	2	$\cdots$	n
价值	$(Ia)^{(m)}_{\overline{n}|}$									$(Is)^{(m)}_{\overline{n}|}$

图 2-7

上述变化年金的现值用符号 $(Ia)^{(m)}_{\overline{n}|}$ 表示，即有：

$$
\begin{aligned}
(Ia)^{(m)}_{\overline{n}|} = {} & \frac{1}{m}\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v\right) + \frac{2}{m}\left(v^{1+\frac{1}{m}} + v^{1+\frac{2}{m}} + \cdots + v^2\right) \\
& + \cdots + \frac{n}{m}\left(v^{n-1+\frac{1}{m}} + v^{n-1+\frac{2}{m}} + \cdots + v^n\right) \\
v\,(Ia)^{(m)}_{\overline{n}|} = {} & \frac{1}{m}\left(v^{1+\frac{1}{m}} + v^{1+\frac{2}{m}} + \cdots + v^2\right) + \frac{2}{m}\left(v^{2+\frac{1}{m}} + v^{2+\frac{2}{m}} + \cdots + v^3\right) \\
& + \cdots + \frac{n}{m}\left(v^{n+\frac{1}{m}} + v^{n+\frac{2}{m}} + \cdots + v^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

对上面的两式，用前式减去后式，就得：

$$
\begin{aligned}
iv\,(Ia)_{\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{1}{m}\left(v^{\frac{1}{m}}+v^{\frac{2}{m}}+\cdots+v+v^{1+\frac{1}{m}}+\cdots+v^{n}\right)\\
&\quad-\frac{n}{m}\left(v^{n+\frac{1}{m}}+v^{n+\frac{2}{m}}+\cdots+v^{n+1}\right)\\
&=\frac{1}{m}\left[\frac{v^{\frac{1}{m}}\left(1-v^{\frac{1}{m}mn}\right)}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right]-\frac{nv^{n}}{m}\,\frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v)}{1-v^{\frac{1}{m}}}=\frac{1-v^{n}-niv^{n+1}}{i^{(m)}}
\end{aligned}
$$

整理后得：

$$
(Ia)_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{1-v^{n}-niv^{n+1}}{iv\;i^{(m)}}=\frac{a_{\overline{n}|}(1+i)-nv^{n}}{i^{(m)}}=\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^{n}}{i^{(m)}} \tag{2.2.42}
$$

从(2.2.42)式可以看出，如按每计息期增长一单位付款而不考虑计息期内付款次数，那么(2.2.42)式与(2.2.32)式相同。因为每个计息期有 m 次付款，将(2.2.32)式中分母中的 i 换为 $i^{(m)}$ 就可得上述年金现值。

该年金的积累值记为 $(Is)_{\overline{n}|}^{(m)}$，就有

$$
(Is)_{\overline{n}|}^{(m)}=(Ia)_{\overline{n}|}^{(m)}(1+i)^{n}=\frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}-n}{i^{(m)}} \tag{2.2.43}
$$

（2）付款额在每个付款期增加一次的年金。这种情形的年金的付款模式如图2-8所示。需要注意的是，相邻两个付款期之间的付款差距不是 $\frac{1}{m}$，而是 $\frac{1}{m^2}$。在上述条件下，某一计息期内的付款总额比上一计息期的付款总额增加 1 个单位。

	一个完整计息期									
付款额	0	$\frac{1}{m^2}$	$\frac{2}{m^2}$	$\cdots$	$\frac{m}{m^2}$	$\frac{m+1}{m^2}$	$\cdots$	$\frac{2m}{m^2}$	$\cdots$	$\frac{nm}{m^2}$
时间点	0	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	$\cdots$	1	$\frac{m+1}{m}$	$\cdots$	2	$\cdots$	n
价值	$(I^{(m)}a)_{\overline{n}\rvert}^{(m)}$	增加 $\frac{1}{m^2}$								$(I^{(m)}s)_{\overline{n}\rvert}^{(m)}$

图 2-8

这种年金的现值记为 $(I^{(m)}a)_{\overline{n}|}^{(m)}$，其计算公式为：

$$
(I^{(m)}a)_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}-nv^{n}}{i^{(m)}} \tag{2.2.44}
$$

(2.2.44)式与(2.2.42)式的推导类似，留作习题。

【例 2-15】某期末付年金每年付款 4 次，首次付款为 1000 元。以后每次付款较前一次付款增加 1000 元，共付款 5 年，假设年实际利率为 8%。计算年金在第 5 年年末的积累值。

根据付款情况，可利用(2.2.44)式计算出在时刻 0 的现值，再将现值积累到第 5 年年末即可。回到(2.2.44)式，这里 $m=4$；公式中的首次付款额为 $\frac{1}{16}$，而本例中年金首次

付款额为 1000 元，因此应用公式时，前面要乘以 $1000\times 16=16000$。因此，

$$V(0)=16000\times\left(I^{(4)}a\right)^{(4)}_{\overline{5}|}=16000\times\frac{\ddot{a}^{(4)}_{\overline{5}|0.08}-5v^5}{i^{(4)}} \tag{2.2.45}$$

通过查表，当 $i=0.08$ 时，$v^5=0.680583$，$i^{(4)}=0.077706$，$\ddot{a}^{(4)}_{\overline{5}|0.08}=\dfrac{i}{d^{(4)}}a_{\overline{5}|0.08}=$ 4.190446。所以 $V(0)=162155.95$(元)，

$$V(5)=V(0)\times(1+0.08)^5=238260.29(\text{元})$$

2.2.6 连续变化年金

在理论上，变化年金的付款可以连续支付。当付款频率变得无穷大，就成为连续变化年金。设有 n 个计息期，利率为 i，在时刻 t 的付款率为 t。这种年金的现值记为 $(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$，就有

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}=\int_0^n tv^t dt=\left.\frac{tv^t}{\ln v}\right|_0^n-\int_0^n\frac{v^t}{\ln v}dt=-\frac{nv^n}{\delta}-\left.\frac{v^t}{\delta^2}\right|_0^n=\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{\delta} \tag{2.2.46}$$

上式也可由(2.2.44)推出：

$$\begin{aligned}(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}&=\lim_{m\to\infty}\left(I^{(m)}a\right)^{(m)}_{\overline{n}|}=\lim_{m\to\infty}\frac{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}-nv^n}{i^{(m)}}\\&=\frac{\bar{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{\delta}\end{aligned}$$

如年金的支付率以函数 $f(t)$ 给出，就可通过下式计算年金的现值：

$$V(0)=\int_0^n f(t)v^t\,\mathrm{d}t \tag{2.2.47}$$

这是计算这种连续变化年金的现值的一般公式。

【例 2-16】 设利息力为 δ，计息期为 n，时刻 t 的支付率以函数 $f(t)=t^2$ 给出，计算该年金的现值。

解： 利用(2.2.47)式，可得：

$$\begin{aligned}V(0)&=\int_0^n f(t)e^{-\delta t}\,\mathrm{d}t=\int_0^n t^2e^{-\delta t}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{n^2e^{-\delta n}}{\delta}-\left.\frac{2t}{\delta^2}e^{-\delta t}\right|_0^n+\frac{2}{\delta^2}\int_0^n e^{-\delta t}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{n^2e^{-\delta n}}{\delta}-\frac{2ne^{-\delta n}}{\delta^2}-\left.\frac{2e^{-\delta t}}{\delta^3}\right|_0^n\\&=\frac{2}{\delta^3}-e^{-\delta n}\left[\frac{n^2}{\delta}+\frac{2n}{\delta^2}+\frac{2}{\delta^3}\right]\end{aligned}$$

另外，连续变化年金的利息力也可以随时间而变化，这是更复杂的形式。如 $\delta_s=\delta(s)$，那么将(2.2.47)式扩展，就有下式：

$$V(0)=\int_0^n f(t)e^{-\int_0^t\delta_s\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t \tag{2.2.48}$$

第 2 章 练习

1. 证明：对于每期付款相等的期初付年金，如在已知利率、各期付款额和年金现值的情况下求解付款期间数时出现非标准期问题（付款期长度非整数），可以在最后一期规则付款时点（设为 $n-1$）和最后一期规则付款的下一期（n）之间的某点 $n+k-1(0<k<1)$ 支付一个金额为 $\left(\text{约定每期付款额} \times \dfrac{(1+i)^k-1}{i}\right)$ 的零头。
2. 证明：给付额最高为 n 的期末付虹式年金和期末付平顶虹式年金的在 0 时刻的现值分别可以表示为 $a_{\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$ 和 $a_{\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} + a_{\overline{n}|} v^n$。
3. 证明：$\left(I^{(m)}a\right)_{\overline{n}|}^{(m)} = \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - nv^n}{i^{(m)}}$。
4. 年金 A 的给付情况是：$1-10$ 年，每年末给付 1000 元；$11-20$ 年，每年末给付 2000 元；$21-30$ 年，每年末给付 1000 元。年金 B 在 $1-10$ 年，每年给付额为 K 元；$11-20$ 年给付额为 0；$21-30$ 年，每年末给付 K 元，如 A 与 B 的现值相等，已知 $v^{10}=1/2$，计算 K。
5. 某人希望采取零存整取方式积累存款 2000 元。前 n 年，每年末存入 50 元，后 n 年每年末存入 100 元，不足部分在第 $2n+1$ 年年末存入，以正好达 2000 元存款本息和。设年利率为 4.5%。计算 n 及超出或不足 2000 的零头差额。
6. 从 2022 年起，直到 2032 年底，某人每年 1 月 1 日和 7 月 1 日在银行存入一笔款项，7 月 1 日的存款要比当年 1 月 1 日的存款增加 10.25%, 而与其后（即下一年）的 1 月 1 日的存款相等，每年计息两次的年名义利率为 10%。在 2032 年 12 月 31 日时，存款本息和为 11000 元，计算第一次存款额。
7. 某期末付年金付款如下：单数年末，每次付款 100 元；双数年末每次付款 200 元，共 20 年。如在某时间 t，一次性付 3000 元的现值与前面的年金现值相等。如年利率 $i=3.5\%$，求 t。
8. 某年末付永续年金首次付款额为 1，第二次为 2，$\cdots$，直到付款额增加到 12，然后保持不变。如年利率为 5%，计算该永续年金现值。
9. 如 $\delta_t = \dfrac{1}{1+t}$，写出 $\bar{a}_{\overline{n}|}$ 的表达式。
10. 甲在 2045 年 1 月 1 日需要 50000 元资金以及一个期初付、每半年领取一次的为期 15 年的年金，每次领取款项为 K 元。因此甲从 2020 年 1 月 1 日起开始储蓄，每年初存入银行 K 元，共 25 年。存入款项时每年计息 2 次的年名义利率为 4%, 领取年金时，每年计息 2 次的年名义利率为 3%，计算 K。
11. 延期 1 年连续变化的年金共付款 13 年。在时刻 t 时，年付款率为 t^2-1，t 时刻利息力为 $(1+t)^{-1}$，计算该年金现值。

第 3 章 收益率

学习目标

本章主要介绍收益率的概念与应用，包括内部收益率和再投资收益率的求法，以及收益率的常见应用：资本预算和股息贴现模型等。

人们在银行存款、在保险公司购买保险产品、在证券市场投资国债、基金或股票等证券时，都需要衡量这一投资行为的回报。通过对现金流的分析，可以计算出某项投资的收益情况。在第2章中我们介绍了年金，如把年金现值相看成是投入，那么每年的年金给付就是回报。在已知现值、付款次数和付款金额的情况下，基于价值方程求出的利率就是投资收益率。如需计算税后收益率或考虑到投资费用，可按照本章的原理计算。

§3.1 收益率的定义

3.1.1 内部收益率

在对收益率定义之前，首先引入对现金流进行一般性分析的符号。

假设投资人在时刻 $0,1,2,\ldots,n$ 有现金流出（或称为投资）$O_0,O_1,O_2,\ldots,O_n$，以及现金流入（或投资回报）$I_0,I_1,\cdots,I_n$，这里 $O_t\geqslant 0$，$I_t\geqslant 0$。

令 $C_t=O_t-I_t$ 表示在时刻 t 的投资支出（负数表示回报），C_t 为在时刻 t 的净现金流出。与净现金流出相对应的一个概念是净现金流入，令 $R_t=I_t-O_t=-C_t$，R_t 为在时刻 t 的净现金流入。当 $R_t<0$ 时，表明在时刻 t 发生投资支出；当 $R_t>0$ 时，表明在时刻 t 发生投资回报。实际中，一般习惯从投资人投资回报的角度（也就是 R_t）进行现金流分析。

现在给出一个实际例子：某人第一年初投资 10000 元，第二年初投资 5000 元。以后每年初投资 1000 元，共投资十年。从第七年起，开始回收资金：第七年初收回 8000 元，第八年初收回 9000 元，…，第十一年初收回 12000 元。具体现金流情况如表3-1所示。

通过对现金流折现，进而分析现金流的方法称为**现金流折现分析**。给定利率 i，现金流所有支付在时刻 0 的现值之和，就是该现金流的现值：

$$V(0)=\sum_{t=0}^{n}v^tR_t \tag{3.1.1}$$

令 $V(0)=0$，求解出的利率就是该现金流的**内部收益率**，即使得投资支出现值与投资回报现值相等的利率，简称为**收益率**。内部收益率只表示特定的现金流的投资回报。

表 3-1: 示例现金流

年份	投入	收回	净现金流 R_t
0	10000	0	-10000
1	5000	0	-5000
2	1000	0	-1000
3	1000	0	-1000
4	1000	0	-1000
5	1000	0	-1000
6	1000	8000	7000
7	1000	9000	8000
8	1000	10000	9000
9	1000	11000	10000
10	0	12000	12000
总计	23000	50000	27000

【例 3-1】 设第 2 年末支付 2000 元、第 4 年末支付 3000 元，两者的现值之和为 4000 元，求利率。

解： 由题意可得 $R_0 = 4000$，$R_2 = -2000$，$R_4 = -3000$。由 $V(0) = 0$ 得

$$4000 - 2000v^2 - 3000v^4 = 0$$

解得

$$v^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{6}$$

因为 $v > 0$，只取 $v = \sqrt{\dfrac{-2+\sqrt{52}}{6}}$，$i = 1/v - 1 = 0.073 = 7.3\%$。

对于表3-1所示的示例现金流来说，现金流并不是一个规则年金的形式，折现后得出的方程是一个高次方程，通常采用软件或金融计算器求解。

求解折现后方程，得到的收益率可能为正值、负值、0，甚至可能为复数。收益率为正值的情况符合人们的投资愿望；收益率为 0 表明投资人无任何回报；收益率为负值表示投资损失发生。现金流的最大损失为投资没有回报，这时 $i = -1$。一般在实务中最小值就是 -1。因此对 $i < 0$ 的情况，限定 i 的范围为 $-1 \leqslant i < 0$。

对于不同的现金流收益率的比较，只能在相同的投资期限内进行，否则就不具可比性。如甲投资项目为期 10 年，收益率为 15%；乙投资项目为期 20 年，收益率为 12%。如不考虑投资期限，甲投资项目显然优于乙投资项目。但乙投资项目在 20 年中都可获得 12% 的收益率，而甲投资项目在该项目进行 10 年结束后的资金再投资收益率是未知的。因此，不同期限的投资收益率一般不具可比性。本节第二部分将介绍再投资收益率的问题。

一般情况下，一组现金流的收益率应是唯一的，但方程 $\sum_{t=0}^{n} R_t v^t = 0$ 是 n 次方程，最多可以有 n 个根。因此，我们需要判断该方程有无有效解（或有效收益率值）。这可以通过简单的计算实现，下面给出两个例子来说明：

【例 3-2】 甲从乙借入 1000 元，年利率为 10%，转手贷给丙，年利率为 15%，期限均为一年，求甲的收益率。

解： 分析甲的现金流：

当 $t=0$ 时：借入 1000 元，贷出 1000 元，$R_0=1000-1000=0$

当 $t=1$ 时：收回 1150 元，还给乙 1100 元，$R_1=1150-1100=50$

此时 $i=\infty$，甲以零投资换回年底 50 元的收入，在不考虑丙的信用风险时，这一交易是套利。

【例 3-3】 某投资人的现金流为：$R_0=-100$，$R_1=200$，$R_2=-101$。求该投资人的投资收益率。

解： 由 $V(0)=\sum_{t=0}^{2} v^t R_t=0$ 可得：

$$-100+200v-101v^2=0$$

整理得：$100i^2=-1$，因此利率 i 为虚数。

由此可见，收益率随现金流的不同可能产生不同的结论。一般而言，如在 $\{0,1,2,\ldots,n\}$ 内存在时刻 t，在时刻 t 之前的现金流正负号一致，在时刻 t 之后的现金流正负号也一致，且两者相反，那么收益率就是唯一的，即最多有一个 $v>0$ 满足 $V(0)=0$，这可由如下定理得出。

Descarts 符号定理： 令 $f(x)$ 为 n 次多项式，即 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，满足 $f(x)=0$ 的正根个数最多为 a_n，a_{n-1}，…，a_1，a_0 这些系数（零系数除外）的正负号改变次数；满足 $f(x)=0$ 的负根个数最多为 $f(-x)$ 中各系数正负号的改变次数。

3.1.2 再投资收益率

通常情况下，我们不考虑给定期间内投资回报的再投资问题，默认再投资收益率与原投资利率相等。例如，银行存款产生的利息，如客户不支取就仍按原定的利率再产生收益。然而，现实中许多情况下，投资所得的收益不一定能按原投资收益率再次投资。例如每年付息的债券，利息再投资收益率就不一定与原债券的利率相同。有的债券规定，如债券产生的收益部分不按时取出，就以某一较低利率计息或不计息。考虑到这些现实情况，有必要对再投资收益率进一步分析。

考虑如下两种再投资情形：

情形 1： 本金一次性支付完成。在时刻 0 投资 1 单位，投资期限为 n，本金年利率为 i。每年产生的利息按利率 j 再投资，那么投资回报在时刻 n 的积累值为：

$$1+is_{\overline{n}|j} \tag{3.1.2}$$

如 $i=j$，上式变为 $(1+i)^n$，该现金流的收益率为 i。如 $i\neq j$，该现金流的收益率就介于 i 与 j 之间。

情形 2： 从时刻 1 开始，本金分多次支付。设各次付款产生的利息的再投资收益率均为 j，即从时刻 2 开始，每期都有由利息产生的再投资收益，再投资收益构成增额年

金。因此，在时刻 n 的积累值为：

$$n+i\,(Is)_{\overline{n-1}|j}=n+i\,\frac{s_{\overline{n}|j}-n}{j} \tag{3.1.3}$$

如 $i=j$，上式化简为 $s_{\overline{n}|i}$。

【例 3-4】 某年金每年初付款 1000 元，共 8 年，各付款利率为 8%，各付款所得利息的再投资利率为 6%。（1）计算第 8 年末的年金积累值。（2）如某人在时刻 0 采取一次性支付方式获得上述积累值，需要支付多少金额才可达到 10% 的收益率。

解：（1）由题意，让我们对(3.1.3)式稍作变化（因为(3.1.3)式中再投资从时刻 2 开始，但本例是年初付年金），就得

$$1000\left[8+0.08\cdot\left(\frac{s_{\overline{9}|0.06}-9}{0.06}\right)\right]=11321.76(\text{元})$$

（2）设要支付的金额为 P，那么

$$P=\frac{11321.76}{(1.1)^8}=5281.68(\text{元})$$

由本题（1）可以看出，所得积累值在 $1000\ddot{s}_{\overline{8}|0.06}=10491.32$ 与 $1000\ddot{s}_{\overline{8}|0.08}=11487.56$ 之间。从（1）反求总的收益率可以看出，收益率为 7.68%，介于 6% 与 8% 之间。

【例 3-5】 某人在年初向外发放贷款 10000 元，本金利率为 9%，为期 3 年，如还款的再投资利率为 6%，按以下几种方式收回贷款本息：（1）以年金方式，每年末归还一次，每次还款额相等；（2）以与利率等价的贴现方式，在贷款时扣除利息；（3）每年末将本年产生的利息支付给贷款人，在第三年末归还本金；（4）第三年末一次性归还本息和。计算并比较各种还款方式下的投资收益率。

解：（1）设每年末还款额为 P，那么

$$P\cdot a_{\overline{3}|0.09}=10000$$

解得 $P=3950.55(\text{元})$

将每年归还的款项按照年收益 6% 再投资，第三年末的积累值为：

$$P\cdot s_{\overline{3}|0.06}=12576.96(\text{元})$$

设总的投资收益率为 i，就得

$$10000\,(1+i)^3=12576.96$$

解得 $i=7.942\%$

（2）由题意，贴现率 $d=\dfrac{i}{1+i}=8.26\%$。

在贷款时扣除的利息为 $10000(1-v^3)=2278.17(\text{元})$

再投资利率为 6%，在贷款时扣除的利息部分再投资后，在第三年末的积累值为：$2278.17\times(1.06)^3=2713.33$ 元。总的收益率由 $10000(1+i)^3=10000+2713.33$ 求出。最后得到

$$i=\left(\frac{10000+2713.33}{10000}\right)^{1/3}-1=8.33\%$$

（3）每年利息 900 元，第三年末总的积累值为

$$10000+900s_{\overline{3}|0.06}=12865.24(\text{元})$$

总的投资收益率为：

$$i=\left(\frac{12865.24}{10000}\right)^{1/3}-1=8.76\%$$

（4）第三年末总积累值为 $10000(1.09)^3=12950.29$ 元，总投资收益率为 9%。

由以上结论可以看出，随着还款速度的减慢（包括还款额度及还款时间分布），总投资收益率越接近本金最初的投资收益率，即最初投资收益率的作用越来越明显。

§3.2 收益率的应用

3.2.1 基金收益率

收益率的主要应用之一是投资基金的收益分析。在第1章中有关利率的问题中我们假设本金不变，利息在期末支付。然而在实际的投资基金业务中，不断会有新的资金投入，也会有资金赎回，各次资金变动的收益在不同的时间段内有差异，现金流的变化没有通常的模式。这就需要找到适合投资基金特点的计算收益率的方法。

为此，我们引入单位时间内的基金收益率及符号如下：

A 表示期初基金额度；B 表示期末基金本息和；I 表示投资期内基金产生的利息；C_t 表示在时刻 t 投入基金或从基金中赎回的额度，$0\leqslant t\leqslant 1$；C 表示在此期间投入或赎回的资金之和，即 $C=\sum_t C_t$；${}_ai_b$ 表示从时刻 b 到时刻 $b+a$ 之间单位投资的利息，其中 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 且 $a+b\leqslant 1$。

采用如上符号，就有如下关系

$$B=A+C+I \tag{3.2.1}$$

另一方面，在一个投资期间内，假设基金产生的利息在期末支付，那么

$$I=iA+\sum_t C_t\,{}_{1-t}i_t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{3.2.2}$$

为求出上式中 i 值，假设 ${}_{1-t}i_t$ 按照复利计算，即

$${}_{1-t}i_t=(1+i)^{1-t}-1 \tag{3.2.3}$$

将 (3.2.3) 式代入 (3.2.2) 式，并迭代（如采用插值法、Newton-Raphson 法等）就可以求出 i 值。根据上节 Descarts 定理，如基金在各时刻余额总为正，那么收益率唯一。

但是，在复利假设下基金收益率的计算较为复杂，我们通常有两种近似方法：

近似 1。对 ${}_{1-t}i_t$ 使用单利近似，能够较为方便地计算收益率，而且误差较小：

$${}_{1-t}i_t\approx(1-t)\,i \tag{3.2.4}$$

将 (3.2.4) 式代入(3.2.2) 式，整理得

$$i \approx \frac{I}{A+\sum_t C_t(1-t)} \tag{3.2.5}$$

近似 2。假设各次资金投入与赎回在 $[0,1]$ 区间内服从均匀分布，那么所有的 C_t 及其发生时间 t 可以近似按总额 C 发生在各时间的均值 $1/2$ 计算，

$$\begin{aligned} i &\approx \frac{I}{A+0.5C} = \frac{I}{A+0.5(B-A-I)} \\ &= \frac{2I}{A+B-I} \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

上式基于 C_t 均匀分布的假设，计算时只需要考虑期初基金额度、利息和期末基金额度三项，即可近似计算出基金的收益率。因此在实务中常用此近似方法来进行粗略评估。但需要注意：如 C_t 不满足均匀分布假设，该方法会产生较大的误差。

有时，如能计算出净资金投入的平均时间，也可以通过修正(3.2.6)式来修正上述估计产生的误差。如净资金投入的平均时间为 k，$0<k<1$，那么(3.2.5)式可写为：

$$i \approx \frac{I}{kA+(1-k)B-(1-k)I} \tag{3.2.7}$$

当 $k=1/2$ 时，(3.2.7) 式就变成了(3.2.6) 式。

【例 3-6】 设年初某基金额度 1000 元，在 4 月末新投入资金 500 元，在 6 月末赎回资金 100 元，在 8 月末赎回资金 200 元。到年底，基金余额为 1272 元。利用公式(3.2.5)式、(3.2.6)式、(3.2.7)式计算基金收益率。

解： 基金利息为 $1272-(1000+500-200-100)=72$(元)

根据公式(3.2.5)，

$$i = \frac{72}{1000+\frac{2}{3}\cdot 500-\frac{1}{2}\cdot 100-\frac{1}{3}\cdot 200} = \frac{72}{1216.7} = 5.92\%$$

根据公式(3.2.6)，

$$i = \frac{2\times 72}{1000+1272-72} \approx 6.55\%$$

根据公式(3.2.7)，首先计算 k 的近似值

$$k = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\Big/ 3 = \frac{1}{2}$$

此时结论与(3.2.6)的结论相同。

3.2.2 时间加权收益率

在投资额加权收益率（也即基金收益率）的计算中，各不同时期的投入资金额对收益率的影响很大。如在高收益期投入或已有的资金量较大，而低收益期投入或已有的资金量较小，那么总体收益率就会较高。投资额加权收益率所计算的是特定期间内特定投资行为的收益率，与具体的投资额相关。下面我们引入与各时间段投资额无关，依据各

时间段收益率计算的**时间加权收益率**。

首先通过一个例子来说明投资额加权收益率和时间加权收益率的区别：

投资 1： 某基金参与人在年初有 1 万元资金。到年中，基金价值降为 5000 元，此时追加 5000 元投入，保持有 1 万元资金。至年底，基金升值到 2 万元。按投资额加权收益率计算方法，就有

$$10000(1+i)+5000(1+i)^{\frac{1}{2}}=20000$$

解得：$i=40.69\%$。

投资 2： 现有与投资 1 相同的基金，参与人在年初有 1 万元资金。到年中，基金价值降为 5000 元，此时投资人赎回 2500 元投资。到年底，基金的价值为 5000 元。按投资额加权收益率计算方法，就有

$$10000(1+i)-2500(1+i)^{\frac{1}{2}}=5000$$

解得：$i=-28.92\%$。

由投资 1 和投资 2 可见，对于同一基金的不同投资行为，投资额加权收益率是不同的，产生差别的原因是前者在升值前又投入了一笔资金，而后者在升值前撤回了一笔资金，失去了一部分基金价值翻番的机会。但本质上，无论是对于投资 1 还是投资 2，从年初到年中，基金管理人使基金亏了一半；从年中到年底，基金管理人使基金翻了一番。因此，在上述两个投资中，基金管理人表现相同，使用投资额加权收益率来评判基金管理人投资水平明显不合适。一个能够评判基金管理人水平的收益率应该和各时间段投资额无关，为此就有时间加权收益率。

时间加权收益率的计算如下：在上述例子中，一年投资期间内分为两个时间段。第一个时间段的投资收益率 $i_1=-0.5$（从年初到年中亏了一半），第二个时间段的投资收益率 $i_2=1$（从年中到年底翻番）。整个期间的时间加权收益率为：

$$i=(1+i_1)(1+i_2)-1=0$$

下面给出求解时间加权收益率的一般方法：

设在一个期间内，有 $m-1$ 次投资行为，如图3-1所示。其中，C_k' 为在时刻 t_k 投入的资金净额，B_k' 为各时刻的整个基金余额，不包括该时刻的新投入，而 i_k 是相邻两次投入资金对应的期间 (t_{k-1},t_k) 的收益率，那么

$$i_k=\frac{B_k'}{B_{k-1}'+C_{k-1}'}-1,\quad k=1,2,\ldots,m \tag{3.2.8}$$

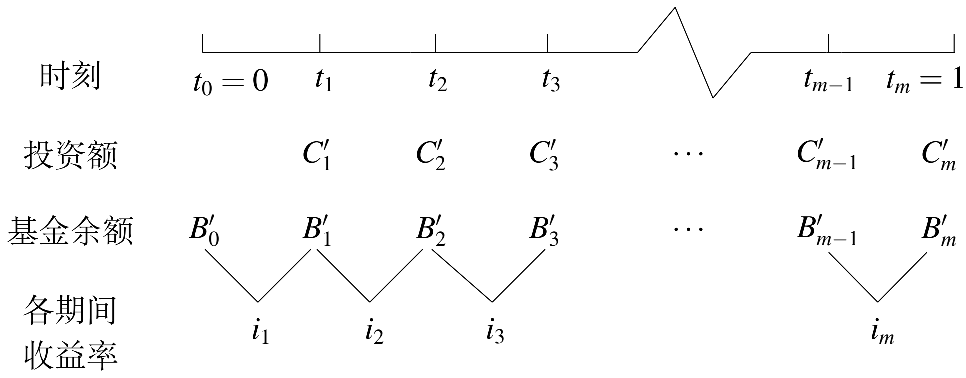

图 3-1

在 $[0,1]$ 期间的时间加权收益率可由下式计算：

$$1+i=(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_m)$$

变形即得

$$i=(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_m)-1 \tag{3.2.9}$$

$$=\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{B'_k}{B'_{k-1}+C'_{k-1}}\right)-1 \tag{3.2.10}$$

上式就是时间加权收益率的一般计算公式。它表示，如在时刻 0，投入单位资金，在一年内各时间段的收益率不管如何变化，该单位投入至年底产生 i 的收益。

【例 3-7】 某投资基金一年内四个时间段各期收益率及甲、乙两投资人的个人投资额及积累额如表3-2所示。计算甲、乙投资人及基金的投资收益率。

表 3-2

时间点	基金各期收益率	甲各时刻投资额	甲各时刻基金积累额	乙各时刻投资额	乙各时刻基金积累额
0			1000		100
1	30%	100	1415	100	245
2	10%	100	1661.5	100	375.5
3	−20%	100	1419.2	100	389.6
4	10%	100	1666.12	100	533.56

解： 对于单个投资人，使用投资额加权收益率的计算方法。因为投资均匀发生，因此应用(3.2.6) 式进行近似计算。对于甲：

$$I=1666.12-100\times 4-1000=266.12$$

$$A=1000$$

$$B=1666.12$$

从而就有

$$i=\frac{2\times 266.12}{1000+1666.12-266.12}=22.18\%$$

对于乙：

$$I=533.56-4\times 100-100=33.56$$

$$A=1000$$

$$B=533.56$$

从而就有

$$i=\frac{2\times 33.56}{100+533.56-33.56}=11.19\%$$

根据(3.2.9)式，整个基金的时间加权收益率为：

$$i=(1+30\%)(1+10\%)(1-20\%)(1+10\%)-1=25.84\%$$

【例 3-8】某投资 1 月 1 日价值 10 万元；5 月 1 日升值到 112000 元，同时投入 3 万元；11 月 1 日，投资价值降到 125000 元，同时又赎回 42000 元；年末投资价值升到 10 万元。（1）计算投资额加权收益率；（2）计算时间加权收益率。

解：（1）由题意知

$$A=100000$$

$$B=100000$$

$$C=300000-42000=-12000$$

$$I=B-A-C=12000$$

根据每次资金投入、赎回的时间，利用式(3.2.5)，投资额加权收益率为：

$$i\approx\frac{12000}{100000+\frac{2}{3}\times 30000-\frac{1}{6}\times 42000}=\frac{12000}{113000}=10.62\%$$

（2）根据(3.2.9)式和(3.2.10)式，时间加权收益率为

$$i=\frac{112000}{100000}\times\frac{125000}{142000}\times\frac{100000}{83000}-1=18.79\%$$

3.2.3 投资组合法和投资年法

如投资基金为某群体投资人所共有，其中每一投资人在投资基金中占有一定的比例，其投资收益取决于基金的整体收益，此时会出现投资收益的分配问题。最常用而又简单的方法就是**投资组合法**：通过计算整个基金的平均收益率，结合每个资金账户所占比例和投资时间的长度来分配基金收益。

下面举例说明投资组合法的收益分配。

【例 3-9】某投资基金有两个投资人，甲在年初投入资金 1 万元，年中投入 1 万元；乙在年初投入 2 万元。上半年收益率为 10%，下半年收益率为 20%。利用投资组合法计算甲乙应分得的收益。

解：基金年末价值为 $[(10000+20000)\times 1.1+10000]\times 1.2=51600$(元)；

基金收益为 $51600-(10000+20000+10000)=11600$(元)

如以最小投资时间间隔为单位时间，甲投资人应分得的收益为：

$$\frac{10000\times 2+10000\times 1}{10000\times 2+10000\times 1+20000\times 2}\times 11600=4971.43(\text{元})$$

乙投资人应分得的收益为：

$$\frac{20000\times 2}{10000\times 2+10000\times 1+20000\times 2}\times 11600=6628.57(\text{元})$$

投资组合法不能体现新投资的收益情况，在收益上升时新投入资金会因受到前期投资收益较低的影响，导致分到较低的收益，不利于吸引新投资人，同时也会失去前期的投资人，他们会转向收益高的新投资。而当收益下降时，会有许多新投资进入来分配前期投资较高的投资收益，不利于保护前期投资人的利益。由于投资组合法的这一不足，下面引入**投资年法**。

投资年法在分配收益时要考虑投资的时间和分配收益的时间。如收益率上升，新投入资金的收益会超过按投资组合法计算的收益。下面通过例子介绍投资年法。

首先制定一张二维表，以表示最初投资时间和投资持续时间，以及与各时间相联系的利率。为便于理解投资年法，我们假设所有时间按日历年计算，并假设所有资金投入和赎回均发生在 1 月 1 日。

设 y 为投资的日历年份，m 是应用投资年法的年数。如投资时间不超过 m 年，使用投资年法计算收益；如超过 m 年，超过部分按投资组合法计算收益。将第 y 年的投资组合收益率记为 i^y（仅在投资时间超过 m 年时使用，注意到没有下标），在 y 年的投资第 t 年的收益率记为 i_t^y，$t=1,2,\ldots,m$（仅在投资时间不超过 m 年时使用，注意到有下标），其中 i_1^y 称为 y 年的新投资收益率。上述概念的关系如图3-2所示：

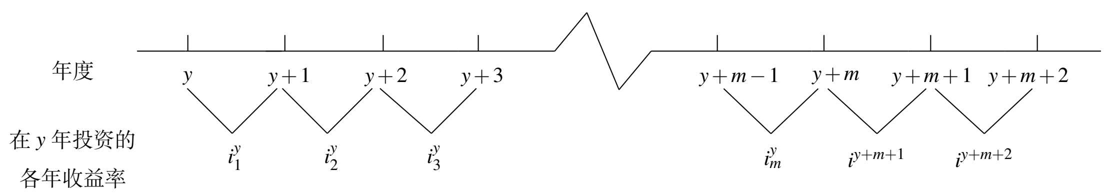

图 3-2

如设 C 是第 y 年初的投资额，那么在第 $y+k$ 年初的积累值为：

$$\begin{cases} C(1+i_1^y)\cdots(1+i_k^y) & k\leqslant m \\ C(1+i_1^y)\cdots(1+i_m^y)(1+i^{y+m+1})\cdots(1+i^{y+k}) & k>m \end{cases}$$

表3-3列出了自 2010 至 2020 年，$m=5$ 时投资年法中的投资收益率值及投资组合收益率值，各收益率均为假设数据。

表 3-3: 示例投资年收益率

日历年	投资年收益率					投资组合收益率
y	i_1^y	i_2^y	i_3^y	i_4^y	i_5^y	i^y
2010	$i_1^{2010}=0.08$	$i_2^{2010}=0.081$	$i_3^{2010}=0.081$	$i_4^{2010}=0.0825$	$i_5^{2010}=0.083$	$i^{2015}=0.081$
2011	$i_1^{2011}=0.0825$	$i_2^{2011}=0.0825$	$i_3^{2011}=0.084$	$i_4^{2011}=0.0845$	$i_5^{2011}=0.085$	$i^{2016}=0.0835$
2012	0.085	0.087	0.0875	0.089	0.09	$i^{2017}=0.086$
2013	0.09	0.09	0.091	0.091	0.092	$i^{2018}=0.0885$
2014	0.09	0.091	0.092	0.093	0.094	$i^{2019}=0.091$
2015	0.0925	0.0935	0.095	0.0955	0.096	$i^{2020}=0.0935$
2016	0.095	0.095	0.096	0.097	0.097	
2017	0.1	0.1	0.099	0.098		
2018	0.1	0.098	0.097			
2019	0.095	0.095				
2020	0.09					

计算某一年的投资收益时，先按横向的投资年收益率计算，然后按竖向的投资组合收益率计算。如在 2013 年的投资 C，经过 3 年的积累值为：

$$C(1+i_1^{2013})(1+i_2^{2013})(1+i_3^{2013})=C(1.09)\times(1.09)\times(1.091)\approx 1.296C$$

经过 6 年的积累值为：

$$\begin{aligned}&C(1+i_1^{2013})\cdots(1+i_5^{2013})(1+i^{2018})\\&=C(1.09)\times(1.09)\times(1.091)\times(1.091)\times(1.092)\times(1.0885)\\&\approx 1.681C\end{aligned}$$

经过 8 年的积累值为：

$$C(1+i_1^{2013})\cdots(1+i_5^{2013})(1+i^{2018})(1+i^{2019})(1+i^{2000})\approx 2.005C$$

在某一特定年份，由于投资年份的不同，会有多个收益率。例如，在 2017 年，当年投资的资金收益率为 0.1，去年投资的资金收益率为 0.095，…，6 年前投资的资金的投资组合收益率为 i^{2017}，如表3-3中虚线所连接的数据所示。

在选择投资基金时，投资者往往最看重首年投资收益率，即新投资收益率。各投资基金一般通过新投资收益率来吸引新投资者。表3-3中 i_1^y 一列是各年的新投资收益率。

实务中，投资年法比投资组合法复杂很多，这是由于年度内的收益率可能按月或按季经常变化，而且新投入的资金不仅发生在年初，也可以发生在一年内的任意一天。在实际中，一般选定 10 年或 5 年的期限内按投资年法计算，超过这一期限后，再使用投资组合法。

【例 3-10】 某人于 2013 年初投资 2 万元，根据表3-3中的收益率，计算新投资收益，第七年末的投资积累值，以及第八年的收益。

解：新投资收益为 $20000\times i_1^{2013}=20000\times 0.09=1800$(元)

第七年末积累值利用表3-3中 2013 年一行的各投资年收益率及 i^{2018}、i^{2019} 计算，即

$$20000\times(1.09)\times(1.09)\times(1.091)\times(1.091)\times(1.092)\times(1.0885)\times(1.091)$$

$$=36678.23(\text{元})$$

第八年的收益为

$$36678.23\times i^{2020}=36678.23\times 0.0935=3429.41(\text{元})$$

3.2.4 资本预算

投资者在面临多种投资选择时，如何决定投资额以及这些投资额在多种可能的投资之间如何分配的过程称为**资本预算**。资本预算的方法一般有两种：收益率法和净现值法。收益率法基于收支平衡的原则，计算现金流的内部收益率进而进行比较；净现值法将所有的现金流折现到同一时刻来比较，进而进行投资决策。如收益率是唯一的，则上述两种方式的结果一致。但当收益率不存在或存在多个收益率时，净现值法更方便。另外，净现值法对投资的收益显示较为直观，可以知道未来最小的收益值。

这里介绍的资本预算没有考虑投资风险。

下面我们通过例子来更好地理解净现值法和收益率法。

【例 3-11】现有两种投资机会，第一种投资在第 1 年年初投资 1000 元，3 年后获得收益 500 元，8 年后获得收益 800 元；第二种投资在第 1 年年初投资 1000 元，3 年后获得收益 550 元，8 年后获得收益 720 元，已知利率为 4%，分别使用净现值法和收益率法选择投资机会。

解：净现值法。将所有现金流按照利率 4% 折现到第 1 年年初，有

$$P_1=-1000+500v^3+800v^8=29.05$$

$$P_2=-1000+550v^3+720v^8=15.04$$

因此选择第一种投资机会。

收益率法。假设内部收益率分别为 r_1、r_2，折现率为 v_1、v_2，令现金流折现到期初时为 0，可得

$$-1000+500v_1^3+800v_1^8=0$$

$$-1000+550v_2^3+720v_2^8=0$$

解得 $r_1=4.51\%$，$r_2=4.28\%$。因此选择第一种投资机会。

3.2.5 股息贴现模型

普通股的股息是不确定的，这增加了普通股定价的难度，理论上普通股的价格等于未来股息的现值，这也是股息贴现模型的基本原理。

设某公司的普通股在期末每股支付股息，分别为 D_1，D_2，D_3，…，假设该股票的

收益率为 r，那么普通股的理论价格为：

$$P=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{(1+r)^n} \tag{3.2.11}$$

如假设股息在每期的期末以固定倍数 $1+g$ 增加，$-1<g<r$，那么普通股的理论价格为

$$P=D_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+g)^{n-1}}{(1+r)^n}=\frac{D_1}{r-g} \tag{3.2.12}$$

条件 $-1<g<r$ 保证了价格是有限的。

一方面，未来的股息有很大的不确定性；另一方面，精确定出股票的收益率也很难。因此，股息贴现模型更多具有理论价值，应用该模型需要给出一些假设。从投资的角度看，在应用股息贴现模型时，对模型中的参数 D_n 和 r 应尽量保守，选择较小的 D_n 和较大的 r，这样得到的价格较低。

当然，在上面的 (3.2.12) 式中，红利按固定的倍数一直增长，该假设是不现实的。红利增长率往往随着公司的成长壮大而逐渐下降。因此，实际应用股息贴现模型时，更多的是考虑下例中的多阶段模型：将公司的未来发展分为若干个阶段，每一阶段对应了不同的股息增长方式，再将所有股息贴现即得股票的价格。

【例 3-12】 现在每股盈利 4 元的普通股，当年末将支付 2 元红利。假设公司的盈利无限期地每年增加 5%，公司将继续按每年盈利的 50% 用于股东分红。如股东年实际收益率为（1）10%、（2）8%、（3）6%，求股票的理论价格。

解：(1) $P=D\dfrac{1}{i-k}=2\times\dfrac{1}{10\%-5\%}=40(\text{元})$ 理论价格是 40 元。

(2) $P=D\dfrac{1}{i-k}=2\times\dfrac{1}{8\%-5\%}=66.66(\text{元})$ 理论价格是 66.66 元。

(3) $P=D\dfrac{1}{i-k}=2\times\dfrac{1}{6\%-5\%}=200(\text{元})$ 理论价格是 200 元。

【例 3-13】 现在每股盈利 4 元的普通股，当年末将支付 2 元红利。假设公司盈利增长率在前 5 年是 5%，第二个 5 年是 2.5%，之后均为 0。如年实际收益率为 10%，求股票的理论价格。

解：将股利分成三段（前 5 年，第二个 5 年，以及 10 年以后），分别折现后再求和即可得到股票的理论价格，由(2.2.39)式得：

$$v+v^2(1+k)+\cdots+v^n(1+k)^{n-1}=\frac{1-\left(\dfrac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k}$$

因此，股票的理论价格为：

$$D\frac{1-\left(\dfrac{1+k_1}{1+i}\right)^{n_1}}{i-k_1}+D(1+k_1)^{n_1}\frac{1-\left(\dfrac{1+k_2}{1+i}\right)^{n_2}}{i-k_2}v^5+D(1+k_1)^{n_1}(1+k_2)^{n_2}a_{\overline{\infty}|}v^{n_1+n_2}$$

将 $D=2$，$i=10\%$，$n_1=n_2=5$，$k_1=5\%$，$k_2=2.5\%$ 代入上式，可得股票的理论

价格为 25.72(元)。

第 3 章 练习

1. 某现金流为：$O_0 = 3000$ 元，$O_1 = 1000$ 元，$I_1 = 2000$ 元，$I_2 = 4000$，求该现金流的收益率。
2. 某投资者第一年末投资 7000 元，第二年末投资 1000 元，而在第一、三年末分别收回 4000 元和 5500 元，计算利率为 0.09 及 0.1 时的现金流现值，并计算该现金流的内部收益率。
3. 某项贷款 1000 元，每年计息 4 次的年名义利率为 12%，如第一年后还款 400 元，第 5 年后还款 800 元，余下部分在第 7 年后还清，计算最后一次还款额。
4. 某投资基金按 $\delta_t = \dfrac{k}{1+(1-t)k}$ 积累，$0 \leqslant t \leqslant 1$，在时刻 0 基金中有 10 万元，在时刻 1 基金中有 11 万元，一年中只有两次现金流，第一次在时刻 0.25 时投入 15000 元，第二次是在时刻 0.75 时收回 2 万元，计算 k。
5. 在某投资业务中，直接投资的利率为 8%，投资所得利息的再投资利率为 4%，某人为在第十年末获得本利和 1 万元，采取每年末投资相等的一笔款项，共 10 年，求证每年投资的款项为：$\dfrac{10000}{2s_{\overline{n}|}100.04 - 10}$。
6. 甲年初投资 2000 元，年利率为 17%，每年末收回利息，各年收回的利息按某一利率投出去，至第十年末，共得投资本息和为 7685.48 元。乙每年末投资 150 元，年利率 14%，共 20 年，每年收回的利息按甲的再投资利率投资，计算乙在第 20 年末的投资本息和。
7. 某投资基金年初有投资 2 万元，年收益率为 12%，三月末又投入资金 5000 元，九月末赎回资金 8000 元，假设 ${}_{(1-t)}i_t = (1-t)i$，计算年末基金的资金量。
8. 某人在第 1、2 年初各投资 1000 元到某基金，第一年末积累额为 1200 元，第二年末积累额为 2200 元。(1) 根据投资额加权法，计算年收益率；(2) 根据时间加权法计算年收益率。
9. 某人借款 10000 元，年利率 4%，分 30 年还清，后 20 年每年还款是前 10 年还款额的 2 倍，第 10 年末，该借款人支付完当年还款额后，一次性支付 10888 元，还清贷款。求贷款人的收益率。
10. 某人购买一辆旧汽车，有两种付款方式：(1) 一次性付完，现金 5 万元；(2) 首次付款 24000 元，然后每年末付款 15000 元，共两年，如该买者的最高可接受利率为 10%，他会选择哪种付款方式？
11. 已知 $1 + i_t^y = (1.08 + 0.005t)^{1+0.01y}$，$1 \leqslant t \leqslant 5$，$0 \leqslant y \leqslant 10$；$t$、$y$ 为整数，如在第 6 年初投资 1000 元，期限为 3 年，计算该投资的年利率。

第 4 章 债务偿还

学习目标

本章介绍分期偿还计划中分期偿还表的构造方法，主要讨论了偿还频率与计息频率相同和不同情况下分期偿还表和偿债基金表的构造，以及借款人调整其债务偿还计划时的有关计算问题。

债务广泛存在于现代经济生活中。人们可能会为大宗消费品的购买（如房屋、车辆等）向金融机构申请贷款；公司会为未来业务的扩展而主动承担一定债务；政府也会为大型民生工程或地方性项目承担一系列债务。借款人为了偿还债务，可能会选择以下偿债方式：

1. 满期偿还。借款者在贷款期满时一次性偿还贷款的本金和利息；
2. 分期偿还。借款者在贷款期内，按一定的时间间隔，分期偿还贷款的本金和利息；
3. 偿债基金。借款者每期向贷款者支付贷款利息，并且按期另存一部分，建立一个基金，在贷款期满时这一基金恰好等于贷款本金，一次性偿还给贷款者。

整体来看，债务满期偿还（上面所列的第一种偿债方式）的计算非常简单，只需要根据贷款额、贷款利率以及贷款期限，利用公式 $A(1+i)^n$ 计算即可。所以本章只介绍分期偿还和偿债基金。值得注意的是，债券也属于分期偿还中的一种特殊情况，但它与普通的贷款相比，包含了更多额外概念。关于债券的内容将在《精算风险管理》中涉及。因此，本书不介绍与债券有关的内容。

§4.1 分期偿还计划

4.1.1 贷款余额

在第2章中，我们已经详细介绍了标准型年金的相关理论。分期偿还债务的各期偿还款形成一种年金形式，而按贷款利率计算的分期偿还款在时刻 0 的现值就是贷款额（本金）。在实务中，我们不仅关注在时刻 0 的贷款额，以及每期偿还额度，也关注在各个时刻的贷款余额，即在各个时刻还剩余多少本金没有还清。一般地，有两种等价的方法来计算各个时刻的贷款余额：过去法和未来法。过去法是将本金在某时刻的积累值减去已还款的积累值，得出贷款余额；未来法是用未来要偿还款的折现值作为贷款余额。

在分期偿还计划中，设 L 为贷款额，n 为分期还款次数，P 为每期还款额，i 为贷款利率。在时刻 k (k 为整数) 的贷款余额（假设刚偿还 P 后），按过去法计算，应该是贷款额 L 按利率 i 的积累值与每期偿还额为 P 的偿还款按利率 i 的积累值之差；按未来法计算，应该是未来 $n-k$ 次偿还款按利率 i 折现到时刻 k 的现值。如将由过去法计算的贷

款余额记为 B_k^r，由未来法计算的贷款余额记为 B_k^p，就有：

$$B_k^r = L(1+i)^k - Ps_{\overline{k}|i} \tag{4.1.1}$$

$$B_k^p = Pa_{\overline{n-k}|i} \tag{4.1.2}$$

下面将证明，由上述两种方法计算出的贷款余额是相等的。首先，在时刻 0 各次偿还款的现值等于贷款额，因此，

$$L = Pa_{\overline{n}|i} \tag{4.1.3}$$

对上式两端都按利率 i 积累到时刻 k，就有：

$$L(1+i)^k = Pa_{\overline{n}|i}(1+i)^k \tag{4.1.4}$$

上式右端是年金任意时刻 k 的当前值，由2.1.3节结论，可以将其分为 k 之前（包括 k）的各次付款在时刻 k 的积累值与 k 之后各次付款的现值。因此，

$$L(1+i)^k = Ps_{\overline{k}|i} + Pa_{\overline{n-k}|i} \tag{4.1.5}$$

变形就得：

$$Pa_{\overline{n-k}|i} = L(1+i)^k - Ps_{\overline{k}|i} \tag{4.1.6}$$

上式表明，过去法和未来法的贷款余额相等。

在时刻 k 与 $k+1$ 之间的某一时刻 $k+t$ $(0<t<1)$，贷款余额为：

$$B_{k+t} = B_k(1+i)^t \quad 0<t<1 \tag{4.1.7}$$

在实务计算中，可根据给定的条件，选择采用过去法或未来法进行计算，使计算更为简便。通常情况下，如已知每次还款额以及未还款次数，那么用未来法较为简便；如不知道未还款次数或最后一次可能涉及不规则还款额，那么用过去法较为方便。

【例 4-1】已知某住房贷款 10 万元，分 10 年还清，每月末还款一次。每年计息 12 次的年名义利率为 6%。分别采用过去法和未来法，计算在还款 50 次后的贷款余额。

解： 首先每次还款额为 $P = \dfrac{100000}{a_{\overline{120}|0.005}}$。

由过去法，

$$\begin{aligned} B_{50}^r &= 100000 \times \left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{50} - P \cdot s_{\overline{50}|0.005} \\ &= 128322.58 - 62887.74 = 65434.84(\text{元}) \end{aligned}$$

由未来法，

$$B_{50}^p = P \cdot a_{\overline{70}|0.005} = 65434.84(\text{元})$$

【例 4-2】某借款人预期 10 年后工资会有大幅上涨，决定在前 10 年每年末还款 8000 元，之后 5 年每年末还款 2 万元，年利率为 8%，计算 $B_{5.5}$。

解： 用未来法计算较为简便。

$$B_5^p = 8000a_{\overline{5}|} + 20000a_{\overline{5}|}\cdot(1+0.08)^{-5} = 86289.11(元)$$

$$B_{5.5} = B_5^p(1.08)^{0.5} = 89654.39(元)$$

4.1.2 分期偿还表

在分期偿还贷款的每期还款中，既包括本金，又包括利息。划分每次还款中的本金和利息有实际意义。例如，银行贷款业务中，要根据每期所得利息来计算应缴营业税，而不是基于全部偿还款计算应缴营业税。分期偿还表就是包括各期偿还款中的利息和本金的额度以及每期还款后的贷款余额的列表。

我们先在一个简单情形下构造分期偿还表。假设在贷款偿还中，每次期末还款额为 1，还款期限为 n，在年利率为 i 的情况下，贷款额就是 $a_{\overline{n}|i}$。该贷款的分期偿还表如下：

表 4-1: 分期偿还表示例

时点	每期还款额	每次还款中的利息	每次还款中的本金	贷款余额
0				$a_{\overline{n}|}$
1	1	$ia_{\overline{n}|} = 1-v^n$	v^n	$a_{\overline{n}|} - v^n = a_{\overline{n-1}|}$
2	1	$ia_{\overline{n-1}|} = 1-v^{n-1}$	v^{n-1}	$a_{\overline{n-1}|} - v^{n-1} = a_{\overline{n-2}|}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	1	$ia_{\overline{n-k+1}|} = 1-v^{n-k+1}$	v^{n-k+1}	$a_{\overline{n-k+1}|} - v^{n-k+1} = a_{\overline{n-k}|}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	1	$ia_{\overline{2}|} = 1-v^2$	v^2	$a_{\overline{2}|} - v^2 = a_{\overline{1}|}$
n	1	$ia_{\overline{1}|} = 1-v$	v	$a_{\overline{1}|} - v = 0$
总计	n	$n - a_{\overline{n}|}$	$a_{\overline{n}|}$	

从表4-1中可看出，期初贷款额为 $a_{\overline{n}|}$。第一年末的还款额 1 中，包括了利息 $ia_{\overline{n}|}$ 和本金 $1-ia_{\overline{n}|}$。注意到 $a_{\overline{n}|} = (1-v^n)/i$，$ia_{\overline{n}|} = 1-v^n$，$1-ia_{\overline{n}|} = v^n$，由此可得表中第一年末第 3、4 列的数据。贷款本金 $a_{\overline{n}|}$ 中减去已经偿还的 v^n，即得贷款余额为 $a_{\overline{n}|} - v^n = a_{\overline{n-1}|}$。其它各行以此类推。在“总计”一行，每次偿还为 1，共 n 次，总和为 n，其中包含偿还的贷款的本金 $a_{\overline{n}|}$，另一部分为贷款的利息 $n - a_{\overline{n}|}$。

表中的贷款余额为 $a_{\overline{n}|}$，$a_{\overline{n-1}|}$，$\dots$，$a_{\overline{1}|}$，各期偿还款中的本金部分成等比数列：v^n，v^{n-1}，$\dots$，v。根据这种关系，只要知道其中某期偿还款中的本金部分，就可以计算出其它各期偿还款中的本金及利息，无需列出整个分期偿还表。

为简便起见，将第 k 期偿还款中的利息部分记为 I_k，本金部分记为 P_k，对于表 4-1

中的各期还款来说，就有：

$$I_k = 1 - v^{n-k+1} \tag{4.1.8}$$

$$P_k = v^{n-k+1} \tag{4.1.9}$$

在表 4-1 中，每次偿还额为 1，贷款额为 $a_{\overline{n}|}$。如果贷款额不是 $a_{\overline{n}|}$，而是 L，那么每期偿还款（记为 P）就是：

$$P = \frac{L}{a_{\overline{n}|}} \tag{4.1.10}$$

上面介绍的分期偿还表基于各次偿还额构成标准型年金。对于一些按变化型年金偿还的分期偿还表，本节后面将有介绍。

【例 4-3】某借款人每季度末偿还贷款一次，每次 1000 元，共 5 年，每年计息 4 次的年名义利率为 12%。计算分期偿还表中第 6 次还款中的本金部分和利息部分。

解：每季度的利率为 3%。由 (4.1.9)式，就有：

$$P_6 = 1000 \cdot v^{20-6+1} = 1000 \times 1.03^{-15} = 641.86(\text{元})$$

从而 $I_6 = P - P_6 = 1000 - 641.86 = 358.14$ (元)。

【例 4-4】甲从乙处借款 1 万元，每季度末还款一次，共 6 年，每年计息 4 次的年名义利率为 8% 。在第 2 年末，乙将这一收回贷款的权利卖给丙，丙的收益率为每年计息 4 次的年名义利率 10%。

1. 丙在这个交易中是获利还是亏损？
2. 乙在这个交易中是获利还是亏损？

解：1. 每季度末的还款额 $= \dfrac{10000}{a_{\overline{24}|0.02}} = \dfrac{10000}{18.9139} = 528.71(\text{元})$

丙在第 2 年年末购买收回贷款的权利，在后续 4 年可以持续获得甲的还款。丙是否获利取决于支付额和将来收到甲的还款的大小关系。

丙购买收回贷款的权利的价格为：

$$528.71 \times a_{\overline{16}|0.025} = 528.71 \times 13.055 = 6902.31\ (\text{元})$$

在后 4 年，甲的偿还款总额为 $16 \times 528.71 = 8459.36$ (元)。因此丙获利 $= 8459.36 - 6902.31 = 1557.05$ (元)。

2. 对于乙，情况相对复杂一些。在没有转卖收回贷款的权利之前，乙可以从贷款的利息中获利；在转卖收回贷款的权利时，如果乙没有按照贷款余额卖出，就可能出现收益或亏损（会计上又称为“资本利得”）。如果想要知道乙是否获利，就要将利息与资本利得相加。

首先计算利息。乙在出卖收款权时的贷款余额为 $528.71 \times a_{\overline{16}|0.02} = 7178.67$ (元)

甲在前两年的还款总额为 $8 \times 528.71 = 4229.68$ (元)，其中还款本金为 $10000 - 7178.67 = 2821.33$ (元)。因此前两年还款中的利息为：

$$4229.68 - 2821.33 = 1408.35\ (\text{元})$$

接着计算资本利得。由于乙在卖出这项权利时的价格为 6902.31 元，低于当时贷款

余额 7178.67 元，乙损失了 $7178.67-6902.31=276.36$ (元)。

最终乙获利为

$$1408.35-276.36=1131.99(\text{元})$$

4.1.3 偿还频率与计息频率不同时的分期偿还表

下面介绍偿还频率与计息频率不同时的分期偿还表。根据第2章中的介绍，这里有两种形式，即偿还频率大于计息频率的形式和偿还频率小于计息频率的形式。

1. 如在每偿还期内计息 k 次，即偿还频率小于计息频率，设计息期为 n，那么共有 n/k 次偿还额，n/k 为整数。如利率为 i，每次偿还款额为 1，那么由(2.2.5)式，贷款额为：

$$a_{\overline{n}|}/s_{\overline{k}|} \tag{4.1.11}$$

此时，贷款偿还只发生在时刻 $k,2k,\ldots,n$。表 4-2列出了在这种情形下每次偿还款包含的利息部分、本金部分，以及刚有一次偿还款后的贷款余额。

表 4-2: 偿还频率小于计息频率情形下的分期偿还表

期间	每次还款额	每次还款中的利息	每次还款中的本金	贷款余额
0				$\frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}$
k	1	$\left[(1+i)^k-1\right]\frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}=1-v^n$	v^n	$\frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}-v^n=\frac{a_{\overline{n-k}|}}{s_{\overline{k}|}}$
$2k$	1	$\left[(1+i)^k-1\right]\frac{a_{\overline{n-k}|}}{s_{\overline{k}|}}=1-v^{n-k}$	v^{n-k}	$\frac{a_{\overline{n-k}|}}{s_{\overline{k}|}}-v^{n-k}=\frac{a_{\overline{n-2k}|}}{s_{\overline{k}|}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
tk	1	$\left[(1+i)^k-1\right]\frac{a_{\overline{n-(t-1)k}|}}{s_{\overline{k}|}}=1-v^{n-(t-1)k}$	$v^{n-(t-1)k}$	$\frac{a_{\overline{n-(t-1)k}|}}{s_{\overline{k}|}}-v^{n-(t-1)k}=\frac{a_{\overline{n-tk}|}}{s_{\overline{k}|}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	1	$\left[(1+i)^k-1\right]\frac{a_{\overline{2k}|}}{s_{\overline{k}|}}=1-v^{2k}$	v^{2k}	$\frac{a_{\overline{2k}|}}{s_{\overline{k}|}}-v^{2k}=\frac{a_{\overline{k}|}}{s_{\overline{k}|}}$
n	1	$\left[(1+i)^k-1\right]\frac{a_{\overline{k}|}}{s_{\overline{k}|}}=1-v^k$	v^k	$\frac{a_{\overline{k}|}}{s_{\overline{k}|}}-v^k=0$
总计	$\frac{n}{k}$	$\frac{n}{k}-\frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}$	$\frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}$	

可以这样理解表 4-2：首次偿还款 1 中，有最初贷款额 $a_{\overline{n}|}/s_{\overline{k}|}$ 产生的利息 $\left[(1+i)^k-1\right]\frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}$。对该利息表达式化简如下：

$$\left[(1+i)^k-1\right]\frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}=\left[(1+i)^k-1\right]\cdot\frac{a_{\overline{n}|}}{\frac{(1+i)^k-1}{i}}$$

$$=ia_{\overline{n}|}=1-v^n \tag{4.1.12}$$

从而此次偿还款额 1 中包含的本金部分为:

$$1-(1-v^n)=v^n$$

最初本金扣除本次偿还的本金部分，贷款余额为:

$$\frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}-v^n=\frac{a_{\overline{n-k}|}}{s_{\overline{k}|}} \tag{4.1.13}$$

其它各次偿还款中的利息部分、本金部分以及贷款余额可类似计算。

整体上来看，每次偿还款为 1，共 n/k 次，即偿还款总额为 n/k，本金 $a_{\overline{n}|}/s_{\overline{k}|}$ 经过 n/k 次还清，还款中的利息总额为 $n/k-a_{\overline{n}|}/s_{\overline{k}|}$。

【例 4-5】某人贷款 1000 元，每年计息 4 次的年名义利率为 12%，贷款偿还时间及额度分别为：第 1 年末 400 元，第 5 年末 800 元，第 10 年末偿还贷款余额。计算第 10 年末的偿还额及其包含的本金和利息。

解: 每季度的实际利率为 $12\%\div 4=3\%$，偿还款发生在第 4 季末、第 20 季末、第 40 季末，设最后一次偿还款为 P，各次偿还款的现值之和等于贷款额，从而就有:

$$1000=400\times(1.03)^{-4}+800\times(1.03)^{-20}+P(1.03)^{-40}$$

$$=355.39+442.94+0.30655P$$

$$P=\frac{1000-355.34-442.94}{0.30655}=657.86$$

首期偿还款中的利息部分 $=1000\times[(1.03)^4-1]=125.51$（元），从而首期偿还款中的本金部分 $=400-125.51=274.49$（元）。第一次还款后，贷款余额 $=1000-274.49=725.51$（元）。

第二次还款中的利息 $=725.51\times\left[\left(1.03^{16}-1\right)\right]=438.72$（元），第二次还款中的本金 $=800-438.72=361.28$（元）。第二次还款后的贷款余额 $=725.51-361.28=364.23$ (元)。

因此最后一次还款中的本金部分为 364.23 元，利息部分为:

$$657.86-364.23=293.63\ (\text{元})$$

2. 如每计息期偿还贷款 m 次，即偿还频率大于计息频率，设有 n 个计息期，每计息期利率为 i，每次还款额为 $1/m$，总共有 mn 次还款。引用第2章年金中的符号，最初贷款额为 $a_{\overline{n}|}^{(m)}$。表 4-3 列出了这种情形下的每次偿还款包含的利息部分、本金部分、以及刚偿还一次后的贷款余额。

表4-3中，首次还款 $\frac{1}{m}$ 中包含最初贷款额到 $\frac{1}{m}$ 时刻所产生的利息 $\frac{i^{(m)}}{m}a_{\overline{n}|}^{(m)}$，该表达式可化简如下:

$$\frac{i^{(m)}}{m}a_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{i^{(m)}}{m}\cdot\frac{1-v^n}{i^{(m)}}=\frac{1}{m}(1-v^n) \tag{4.1.14}$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{m}v^n \tag{4.1.15}$$

表 4-3: 偿还频率小于计息频率情形下的分期偿还表

期间	每次还款额	每次还款中的利息	每次还款中的本金	贷款余额
0				$a_{\overline{n}\vert}^{(m)}$
$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{i^{(m)}}{m}a_{\overline{n}\vert}^{(m)}=\frac{1}{m}(1-v^n)$	$\frac{1}{m}v^n$	$a_{\overline{n}\vert}^{(m)}-\frac{1}{m}v^n=a_{\overline{n-\frac{1}{m}}\vert}^{(m)}$
$\frac{2}{m}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{i^{(m)}}{m}a_{\overline{n-\frac{1}{m}}\vert}^{(m)}=\frac{1}{m}(1-v^{n-\frac{1}{m}})$	$\frac{1}{m}v^{n-\frac{1}{m}}$	$a_{\overline{n-\frac{1}{m}}\vert}^{(m)}-\frac{1}{m}v^{n-\frac{1}{m}}=a_{\overline{n-\frac{2}{m}}\vert}^{(m)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{k}{m}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{i^{(m)}}{m}a_{\overline{n-\frac{k-1}{m}}\vert}^{(m)}=\frac{1}{m}(1-v^{n-\frac{k-1}{m}})$	$\frac{1}{m}v^{n-\frac{k-1}{m}}$	$a_{\overline{n-\frac{k-1}{m}}\vert}^{(m)}-\frac{1}{m}v^{n-\frac{k-1}{m}}=a_{\overline{n-\frac{k}{m}}\vert}^{(m)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{i^{(m)}}{m}a_{\overline{\frac{2}{m}}\vert}^{(m)}=\frac{1}{m}(1-v^{\frac{2}{m}})$	$\frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}}$	$a_{\overline{\frac{2}{m}}\vert}^{(m)}-\frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}}=a_{\overline{\frac{1}{m}}\vert}^{(m)}$
n	$\frac{1}{m}$	$\frac{i^{(m)}}{m}a_{\overline{\frac{1}{m}}\vert}^{(m)}=\frac{1}{m}(1-v^{\frac{1}{m}})$	$\frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}}$	$a_{\overline{\frac{1}{m}}\vert}^{(m)}-\frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}}=0$
总计	n	$n-a_{\overline{n}\vert}^{(m)}$	$a_{\overline{n}\vert}^{(m)}$	

(4.1.14)式就是表4-3中首期还款的利息部分，(4.1.15)式表明，从首期还款 $\frac{1}{m}$ 减去 $\frac{1}{m}v^n$ 后是其中利息部分，从而 $\frac{1}{m}v^n$ 正是此次还款中包含的贷款本金部分，而最初贷款余额减去首期偿还的本金之后，就是第一次还款后的贷款余额。

【例 4-6】甲购买住房的贷款额为 2×10^6 元，分三次领取。办理贷款后，首次领取 1×10^6 元，半年后领取 5×10^5 元，1 年末领取 5×10^5 元。贷款按每年计息 2 次的年名义利率 15%，积累到第 2 年末。然后甲按每月计息 1 次的年名义利率 12% 进行分期按月偿还，为期 30 年。前 5 年每月偿还额是其后各年每月偿还额的一半。首期偿还款发生在第 3 年初，计算第 12 次偿还款的额度。

解：两年末，贷款积累值为:

$$1\times10^6\times(1.075)^4+5\times10^5\times(1.075)^3+5\times10^5\times(1.075)^2=2534430.08\ \text{（元）}$$

该积累值是分期还款额在第三年初的现值。设前 5 年每次偿还额为 P，就有:

$$2534430.08=P\cdot\ddot{a}_{\overline{60}\vert 0.01}+2P\cdot\ddot{a}_{\overline{300}\vert 0.01}\cdot v^{60}$$

$$\begin{aligned}P&=\frac{2534430.08}{\ddot{a}_{\overline{60}\vert 0.01}+2v^{60}\cdot\ddot{a}_{\overline{300}\vert 0.01}}=\frac{2534430.08}{1.01\cdot a_{\overline{60}\vert 0.01}+2\times(1.01)v^{60}\cdot a_{\overline{300}\vert 0.01}}\\&=\frac{2534430.08}{(1.01)\times(44.95504)+2\times(1.01)\times(0.55045)\times(94.94655)}\\&=16786.91\ \text{（元）}\end{aligned}$$

第 12 次偿还款发生在第一年, 即 $P=16786.91$ 元。

4.1.4 变动偿还系列

分期偿还贷款的每期偿还额可以不同，例如：在等额的分期偿还款后，出现一个不规则的还款额；各期偿还款均不相同等。这里我们假设计息频率与还款频率是相同的。

用 R_k 表示第 k 期末的分期还款额，$k=1,2,\ldots,n$，贷款利率为 i，就有：

$$L=\sum_{k=1}^{n}v^{k}R_{k}$$

这是一般情形下的分期偿还现值公式，其中 $R_k>0$ 。如 R_k 呈现某种模式，例如：R_k 构成等差数列、等比数列等，就可以应用第二章的相关公式计算分期偿还款的现值（即贷款本金）。根据利率及每次还款额，就可计算出各期偿还款中的本金部分、利息部分、以及各期末贷款余额，构造出相应的分期偿还表。

【例 4-7】 某借款人年初贷款，利率为 5%，贷款期限为 10 年，首年末还款额为 2000 元，第二年末为 1900 元，依此类推，第 10 年末还款额为 1100 元，计算：

（1）贷款本金；

（2）第 5 次还款中的本金部分和利息部分。

解：（1）贷款本金为:

$$L=1000a_{\overline{10|}}+100\,(Da)_{\overline{10|}}$$

$$=1000\times(7.72173)+100\times\frac{10-7.72173}{0.05}=12278.27\quad（元）$$

（2）$R_5=1600$

$$B_4^P=1000a_{\overline{6|}}+100\,(Da)_{\overline{6|}}$$

$$I_5=iB_4^P=1000\times\left(1-v^6\right)+100\times\left(6-a_{\overline{6|}}\right)$$

$$=1000\times(1-0.74622)+100\times(6-5.0757)=346.21\quad（元）$$

$$P_5=R_5-I_5=1600-346.21=1253.79\quad（元）$$

等额本金还款是变动偿还的一个特例。在等额本金还款的情况下，每次偿还额的本金相等。此时，将本金和利息分别考虑能使计算更加清晰。

【例 4-8】 某人从银行贷款 2 万元。本金部分按 20 年期等额形式偿还。每次偿还本金的同时，偿还贷款的当期利息，设年利率为 3% 。10 年后，银行将这种收款权卖给另一家公司，卖出价格为 P，使得买入公司在前 5 年有 5% 的收益率，后 5 年有 4% 的收益率，计算 P。

解： 第一年末贷款余额为 19000 元，第二年末为 18000 元，$\cdots$，每年还款中本金部分为 1000 元。对于利息部分：第一年末为 $20000\times3\%$，第二年末为 $19000\times3\%$，$\cdots$。

10 年后，由于前 5 年和后 5 年的年收益率不同，所以要分段进行计算：

$$
\begin{aligned}
P &= 1000\left[a_{\overline{5}|0.05}+(1.05)^{-5}a_{\overline{5}|0.04}\right]+\left[150a_{\overline{5}|0.05}+30\,(Da)_{\overline{5}|0.05}+30(1.05)^{-5}\,(Da)_{\overline{5}|0.04}\right]\\
&=1000\times[4.3295+(0.78353)\times(4.4518)]+\left[150\times(4.3295)+30\times\left(\frac{5-4.3295}{0.05}\right)\right.\\
&\quad\left.+30\times(0.78353)\times\left(\frac{5-4.4518}{0.04}\right)\right]\\
&=9191.49(\text{元})
\end{aligned}
$$

注意到上面第一个等式右边第二项是关于利息的现值，分别为 300, 270, 240, 210, 180, …, 30，其中 $(300,270,240,210,180)=(150,150,150,150,150)+30\times(5,4,3,2,1)$。

如果分期偿还中每次偿还额呈递增形式，可能出现开始几期偿还款中还款额小于应计利息额的情况，这样就会使贷款余额增加，增加的部分来源于部分利息的本金化。

§4.2 偿债基金

4.2.1 偿债基金表

债务偿还的另一种方式就是建立偿债基金。借款人在每还款期将在该期内贷款产生的利息支付给贷款人，同时也在一个新建立的基金中分期存入一些偿还额，使得基金在贷款期末积累到贷款本金额度，从而偿还贷款本金。称该基金为**偿债基金**，每期支付的利息为服务费。

在实务中，这种偿债基金往往是贷款人要求借款人建立的，以保证贷款的偿还，每次存入基金的额度可以相同，也可以不同。这里先介绍每次存入基金的额度相同的偿债基金。

按这种方式，在贷款期内每次偿还时，一方面贷款本金不变，另一方面偿债基金积累增长，二者之差就是贷款余额。

如贷款额为 1 个单位，年利率为 i，贷款期限为 n，按偿债基金法，每期支付利息为 i。设各期存入偿债基金的款度为 D，偿债基金存款利率也为 i，就有

$$D\cdot s_{\overline{n}|i}=1$$

因此

$$D=\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \tag{4.2.1}$$

这样，借款人每期末需要支付的额度为 $\dfrac{1}{s_{\overline{n}|i}}+i$。如果按分期偿还法，每期的偿还额为 $\dfrac{1}{a_{\overline{n}|i}}$。由(2.1.5)式可知：

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}=\frac{1}{s_{\overline{n}|i}}+i$$

可见两种方法在贷款利率与偿债基金存款利率相等时是等价的。

与表4-1对应，我们给出贷款额为 $a_{\overline{n}|i}$，期限为 n，贷款利率与偿债基金存款利率都为 i 的偿债基金表，如表4-4所示。

表 4-4: 偿债基金表示例

期间	每次支出额	利息部分	存入基金部分	基金利息收入	偿债基金总额	净贷款余额
0						$a_{\overline{n}|i}$
1	1	$ia_{\overline{n}|i}$	v^n	0	v^n	$a_{\overline{n}|i}-v^n=a_{\overline{n-1}|i}$
2	1	$ia_{\overline{n}|i}$	v^n	iv^n	$v^n s_{\overline{2}|i}$	$a_{\overline{n}|i}-v^n s_{\overline{2}|i}=a_{\overline{n-2}|i}$
3	1	$ia_{\overline{n}|i}$	v^n	$iv^n s_{\overline{2}|i}$	$v^n s_{\overline{3}|i}$	$a_{\overline{n-3}|i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	1	$ia_{\overline{n}|i}$	v^n	$iv^n s_{\overline{k-1}|i}$	$v^n s_{\overline{k}|i}$	$a_{\overline{n-k}|i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	1	$ia_{\overline{n}|i}$	v^n	$iv^n s_{\overline{n-1}|i}$	$v^n s_{\overline{n}|i}=a_{\overline{n}|i}$	$a_{\overline{0}|i}=0$
总计	n	$nia_{\overline{n}|i}$	nv^n	$a_{\overline{n}|i}-nv^n$		

从表4-4可以看出，借款人每期支出额为 1，它包括两部分：一部分作为贷款产生的利息支付给贷款人；另一部分作为存款存入偿债基金，具体为 $1=ia_{\overline{n}|}+v^n$。偿债基金总额是各次存入偿债基金的额度的积累值。基金利息收入为本期初偿债基金总额在本期产生的利息，各期利息收入之和正是贷款本金与存入基金的本金之差。

如贷款利率与偿债基金存款利率不同，偿债基金方式与分期偿还方式的还款额就不同。在实务中，经常出现两者不同的情况，一般都是贷款利率高于偿债基金存款利率，下面介绍这种情况下的贷款偿还。为避免引入过多的符号，我们假设每期存入偿债基金的金额以及每期借款人的支出额都相等。

设 L 为贷款额，n 为贷款期限，i 为贷款利率，j 为偿债基金存款利率，D 为每期存入偿债基金的额度，P 为每期借款人的总支出额（包括利息及存入基金的额度）。

在实务中，一般都为 $i>j$。从数学上看，可以有 $i\leqslant j$ 的情况。以下讨论对 i 和 j 没有限制。

由偿债基金的定义，有下面的关系：

$$L=D\cdot s_{\overline{n}|j} \tag{4.2.2}$$

因此

$$D=\frac{L}{s_{\overline{n}|j}} \tag{4.2.3}$$

现在，我们将利息部分与存入基金部分相加，结合(2.1.5)式，就有：

$$
\begin{aligned}
P &= Li + D \qquad (4.2.4)\\
&= Li + \frac{L}{s_{\overline{n}|j}} = L\left(i + \frac{1}{s_{\overline{n}|j}}\right) = L\left(i - j + \frac{1}{a_{\overline{n}|j}}\right)\\
&= \frac{\dfrac{L}{a_{\overline{n}|j}}}{1+(i-j)a_{\overline{n}|j}} \qquad (4.2.5)
\end{aligned}
$$

引入 $a_{\overline{n}|i\&j}$ 如下：

$$
a_{\overline{n}|i\&j} = \frac{a_{\overline{n}|j}}{1+(i-j)a_{\overline{n}|j}} \qquad (4.2.6)
$$

那么借款人每期的支出额可写为：

$$
P = \frac{L}{a_{\overline{n}|i\&j}} \qquad (4.2.7)
$$

借款人第 k 次支付后，**贷款净余额**记为 NB_k，那么

$$
NB_k = L - Ds_{\overline{k}|j} \qquad (4.2.8)
$$

第 k 期内的**净本金支付**定义为第 k 期末偿债基金与第 k 期初偿债基金的额度之差，记为 NP_k，

$$
\begin{aligned}
NP_k &= D\cdot s_{\overline{k}|j} - D\cdot s_{\overline{k-1}|j}\\
&= D + D\cdot s_{\overline{k-1}|j}(1+j) - D\cdot s_{\overline{k-1}|j} = D(1+js_{\overline{k-1}|j})\\
&= D(1+j)^{k-1} \qquad (4.2.9)
\end{aligned}
$$

由(4.2.3)式和(4.2.8)式，就有：

$$
\begin{aligned}
NB_k &= L - Ds_{\overline{k}|j} = L - \frac{L}{s_{\overline{n}|j}}s_{\overline{k}|j} = L\frac{s_{\overline{n}|j} - s_{\overline{k}|j}}{s_{\overline{n}|j}}\\
&= L\frac{a_{\overline{n}|j} - v^{n-k}a_{\overline{k}|j}}{a_{\overline{n}|j}}\\
&= \frac{L}{a_{\overline{n}|j}}\left(v+v^2+\cdots+v^n - v^{n-k+1} - v^{n-k+2} - \cdots - v^n\right)\\
&= \frac{L}{a_{\overline{n}|j}}\left(v+v^2+\cdots+v^{n-k}\right) = \frac{L}{a_{\overline{n}|j}}a_{\overline{n-k}|j} \qquad (4.2.10)
\end{aligned}
$$

如贷款利率为 j，那么分期偿还计划中每期还款额为 $P = \dfrac{L}{a_{\overline{n}|j}}$，第 k 期还款后的贷款余额为：

$$
B_k = Pa_{\overline{n-k}|j} = \frac{L}{a_{\overline{n}|j}}a_{\overline{n-k}|j}
$$

它与(4.2.10)式相同。这就是说，贷款利率为 i，基金存款利率为 j 的偿债基金中第 k 期还款后的净贷款余额，与贷款利率也为 j 的分期偿还法中第 k 期还款后的贷款余额相等。

根据(4.2.9)式，有

$$NP_k = D(1+j)^{k-1} = \frac{L}{s_{\overline{n}|j}}(1+j)^{k-1} \cdot \frac{v^n}{v^n}$$
$$= \frac{L}{a_{\overline{n}|j}} v^{n-k+1} \tag{4.2.11}$$

如贷款利率为 j，那么分期偿还计划每期还款额为 $P = \frac{L}{a_{\overline{n}|j}}$，因此 (4.2.11)式可写为 Pv^{n-k+1} 。这表明，偿债基金法中第 k 期支付款中净本金支付，与以 j 为贷款利率的分期偿还法中的第 k 期偿还款中的本金部分相等。

【例 4-9】甲需要 1 万元贷款，分 4 年偿还，乙、丙都可提供这笔贷款，乙要求甲每年末支付利息并建立偿债基金，偿债基金存款利率为 8%，贷款利率为 10%。丙要求甲按分期偿还法偿还贷款，求使这两种贷款等价的丙的贷款利率。

解：乙、丙都要求甲在每年末支付一笔等额偿还款，共四次。按照两种贷款等价的定义，对于甲，两种贷款的每年支出额应相等。

贷款人乙要求的每年支出额 $= \frac{10000}{a_{\overline{4}|0.1\&0.08}} = 3219.21$（元）

因此丙的贷款利率应满足：

$$\frac{10000}{a_{\overline{4}|i}} = 3219.21$$

$$a_{\overline{4}|i} = 3.1064$$

使用例2-9介绍的两种方法，可以分别得到 $i = 10.96\%$（试错-插值法）和 $i = 10.94\%$（金融计算器法）。

一般地，分期偿还形式的贷款与偿债基金法下的贷款如要等价，分期偿还的贷款利率 i' 与偿债基金法下的贷款利率 i 及基金存款利率 j 有下面的近似关系：

$$i' \approx i + \frac{1}{2}(i-j) \tag{4.2.12}$$

【例 4-10】某贷款为 1000 元，10 年期，年利率 5%，按偿债基金法偿还，每年末借款人支付相等的利息，同时在偿债基金中每年等额存人偿债本金，偿债基金年利率为 4%，在第 10 年末，偿债基金积累值恰好为 1000 元。计算第 5 年借款人支付的利息额与偿债基金所产生的利息额之差。

解：每年存人偿债基金的额度为：

$$D = \frac{1000}{s_{\overline{10}|0.04}}$$

第 4 年末偿债基金额为：

$$D \cdot s_{\overline{4}|0.04} = \frac{1000}{s_{\overline{10}|0.04}} s_{\overline{4}|0.04}$$

第 5 年偿债基金所产生的利息为：

$$= 0.04 \times \frac{1000}{s_{\overline{10}|0.04}} s_{\overline{4}|0.04} = \frac{1000}{s_{\overline{10}|0.04}} \left[(1.04)^4 - 1\right]$$

$$= \frac{1000}{12.0061} \times (0.16986) = 14.15 \quad (\text{元})$$

借款人每期支付利息 $= 0.05 \times 1000 = 50$（元）。最后所求的利息之差 $= 50 - 14.15 = 35.85$（元）。

4.2.2 偿还频率与计息频率不同时的偿债基金法

与分期偿还法相似，偿债基金法也存在偿还频率与计息频率不同的情况，这时的计算相对较为复杂，可能会出现四种频率：（1）贷款利息支付频率；（2）贷款计息频率；（3）偿债基金存款频率；（4）偿债基金计息频率。这四种频率可以部分不同，也可以全部不同，使得相关的计算复杂化。但是可以根据基本原理，进行分析计算。

这里不再列出一般化的偿债基金表，只介绍两个例子，使读者理解和掌握这些情形下偿债基金的计算。

【例 4-11】 甲借款 2000 元，为期 2 年，贷款年利率为 10%，借款人建立偿债基金并每半年末在偿债基金中存款一次，偿债基金利率为每年计息 4 次的年名义利率 8%。构造这一贷款的偿债基金表。

解：借款人每年末付贷款利息为 $0.1 \times 2000 = 200$ (元)，设每半年末的偿债基金存款额为 D，那么由 (2.2.6)式可得：

$$D\frac{s_{\overline{8}|0.02}}{s_{\overline{2}|0.02}} = 2000$$

因此，

$$D = \frac{2000 s_{\overline{2}|0.02}}{s_{\overline{8}|0.02}} = 2000 \times \frac{2.02}{8.5830} = 470.70 \quad (\text{元})$$

偿债基金表如下所示：

表 4-5: 偿还频率与计息频率不同时的偿债基金表示例

期间	支付利息	偿债基金存款	偿债基金每计息期所得利息	偿债基金额	净贷款余额
0					2000
$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	2000
$\frac{1}{2}$	0	470. 70	0	470. 70	1529.30
$\frac{3}{4}$	0	0	9.41	480.11	1519.89
1	200	470. 70	9.60	960.41	1039.59
$1\frac{1}{4}$	0	0	19.21	979.62	1020.38
$1\frac{1}{2}$	0	470.70	19. 59	1469.91	530.09
$1\frac{3}{4}$	0	0	29.40	1499.31	500.69
2	200	470. 70	29.99	2000	0

【例 4-12】 在上例中，假设贷款利率为每年计息 2 次的年名义利率 10%，但仍然只在年末支付利息，其它条件不变，重新构造偿债基金表。

解： 由于其它条件未变，因而上例的偿债基金表中只有“支付利息”一列发生变化。在 $\dfrac{1}{2}$ 年时，已计息一次，为 $2000 \times 0.05 = 100$ 元，这 100 元在第一个半年末时并未支付，实际相当于将其资本化，积累到第一年末，为 105 元，而贷款本金在第二次计息时，又获得 100 元利息，这样，第一年末支付的利息不再是 200 元，而是 205 元。也可以用 $(1.05)^2 - 1 = 0.1025$ 来作为利息支付期的实际利率计算，结果相同，因而所求偿债基金表为: 将上例答案中表 4-5 的第二列中第 1 年末与第 2 年末利息支付“200 元”调整为 205 元。

4.2.3 变额偿还系列

偿债基金存款有时可以根据借款人的情况做出调整，使各期在基金的存款不尽相同，但最终在贷款期满时，偿还基金积累额要达到贷款本金的额度。这里假设各期的利息支付不变，只是偿债基金每次存款额会变化。

假设借款人各次还款支出为 $R_1, R_2, \ldots, R_n$，贷款额为 L，那么每次还款支出中，利息部分为 iL，存入偿债基金的部分为 $R_k - iL$，$k = 1, 2, \ldots, n$，因为偿债基金 n 期末积累

值正好是 L，所以就有:

$$L = (R_1 - iL)(1+j)^{n-1} + (R_2 - iL)(1+j)^{n-2} + \cdots + (R_n - iL)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} R_k(1+j)^{n-k} - iLs_{\overline{n}|j} \tag{4.2.13}$$

在上述式子中，我们通常假设 $R_k - iL > 0$，即每期向偿债基金存款 $R_k - iL$。如 $R_k - iL < 0$，表明借款人从偿债基金中取款以支付贷款利息。由(4.2.13)式，解方程可得:

$$L = \frac{\sum_{k=1}^{n} R_k(1+j)^{n-k}}{1 + is_{\overline{n}|j}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} R_k v_j^k}{1 - ja_{\overline{n}|j} + ia_{\overline{n}|j}}$$
$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} R_k v_j^k}{1 + (i-j)a_{\overline{n}|j}} \tag{4.2.14}$$

如 $R_k = 1$（每期借款人支出都相等），那么(4.2.14)式化简为:

$$L = a_{\overline{n}|i\&j} = \frac{a_{\overline{n}|j}}{1 + (i-j)a_{\overline{n}|j}} \tag{4.2.15}$$

如 $i = j$，那么(4.2.14)式化简为:

$$L = \sum_{k=1}^{n} v^k R_k \tag{4.2.16}$$

对于变额偿还系列的具体问题，需要根据已知条件进行具体分析，这里不给出统一的偿债基金表，只通过几个例子说明变额系列的偿债基金的计算。

【例 4-13】 甲借款 10 万元，贷款期限为 30 年。已知:

（1）第一年末在偿债基金中首次存款 X；

（2）以后每年末在偿债基金中存款比上一年增加 100 元，直至第 20 年末，然后保持不变至第 30 年末；

（3）贷款利息每年末支付；

（4）贷款年利率为 5%，偿债基金存款年利率为 4%。

计算 X 及甲支出的总额。

解： 根据偿债基金法偿还贷款的原理，可得:

$$100000 = Xs_{\overline{30}|0.04} + 100\,(Is)_{\overline{29}|0.04} - 100\,(Is)_{\overline{10}|0.04}$$

上式可以这样理解: 首先将年金分解成 $Xs_{\overline{30}|0.04}$ 这个等额期末付年金和 $100\,(Is)_{\overline{29}|0.04}$ 这个各年付款额构成等差数列的基本变额年金；但因为最后 10 年向偿债基金中的存款保持不变，所以需要减去多加的 $100\,(Is)_{\overline{10}|0.04}$。解得 $X = 731.10$（元）。

甲每年支付利息额为 $0.05 \times 100000 = 5000$（元），因此 30 年共支付利息为 $30 \times 5000 = 150000$ (元)。

30 年偿债基金存款之和

$$X + (X+100) + \cdots + (X+1800) + (X+1900) \times 11$$
$$= 30X + 100 + 200 + \cdots + 1800 + 1900 \times 11$$
$$= 59932.91(\text{元})$$

因此，甲支出总额为 $150000+59932.91=209932.91$（元）。

【例 4-14】甲从银行借款，期限为 4 年，年利率为 12%，采用偿债基金还款法，偿债基金存款利率为 8% 。甲每年末可支出额度为：100 元、100 元、1000 元、1000 元，支出款中一部分作为利息，另一部分作为偿债基金存款，计算甲可以借款的数额。

解：设 L 为可以借款的额度，那么每年需偿还的利息为 $0.12L$，每年向偿债基金存款为: $100-0.12L$、$100-0.12L$、$1000-0.12L$、$1000-0.12L$，这些存款第 4 年末的积累额应达到借款额，即有：

$$(100-0.12L)s_{\overline{4}|0.08}+900s_{\overline{2}|0.08}=L$$

$$\begin{aligned}L&=\frac{100s_{\overline{4}|0.08}+900s_{\overline{2}|0.08}}{1+0.12s_{\overline{4}|0.08}}\\&=\frac{100\times(4.5061)+900\times(2.08)}{1+0.12\times(4.5061)}=1507.47\quad(\text{元})\end{aligned}$$

上述结果有些不够准确，原因主要在于利息的本金化。在之前的(4.2.13)式中，我们假设 $R_k-iL>0$，也就是每一次向偿债基金中的存款都大于 0。但本例却并非如此：从每年利息计算看，$0.12L=0.12\times1507.47=180.90$ (元)，超过第一年和第二年甲各年的支出额 100 元。因此，在第一年和第二年，甲并没有足额偿还当年的利息。这部分未偿还的利息会转化为本金，每年以 12% 的利率再产生利息，直到最后一年才由偿债基金足额偿还。

由于利息本金化的存在，第一年末和第二年末的本金不再是常数，而是在不断增长。因此，问题的求解分为两步。

第一步，计算第二年末的本金，并将其表示为总借款额的函数。设总借款额为 L'，那么第二年末的本金 B_2 为：

$$\begin{aligned}B_2&=(1.12L'-100)\times1.12-100\\&=1.2544L'-212\end{aligned}$$

可以这样来理解上式：如果没有利息的本金化，第一年末的本金仍为 L'；但在第一年末，贷款利息为 $0.12L'$，超过了当年总支出额 100，所以有 $0.12L'-100$ 的利息要被本金化。由此，第一年末的本金为 $1.12L'-100$，这也是第一年末的贷款余额。在第二年，$1.12L'-100$ 的本金产生了 $(1.12L'-100)\times0.12$ 的利息，超过了当年总支出额 100，所以有 $[(1.12L'-100)\times0.12-100]$ 的利息被本金化。由此，第二年末的本金为 $[(1.12L'-100)\times1.12-100]$，这也是当年的贷款余额。前两年中，偿债基金中没有存款，因为所有支付额都被用来偿还当年贷款利息。

一种更加简便的方法是直接使用过去法求得贷款余额：

$$\begin{aligned}B_2&=(1.12L'-100)\times1.12-100\\&=L'(1.12)^2-100s_{\overline{2}|0.12}\\&=1.2544L'-212\end{aligned}$$

需要注意的是，这里的 $s_{\overline{2}|0.12}$ 的利率为 0.12 而不是 0.08，这是因为前两年的支出额不足以支付贷款利息，未偿还的贷款利息本金化。此时没有偿债基金存款。

第二步，列出价值等式，使第 2 年末的本金 B_2 可以被偿债基金在第 4 年末积累出来。为此就有：

$$B_2 = (1000 - 0.12B_2)\, s_{\overline{2}|0.08}$$

$$B_2 = \frac{1000 s_{\overline{2}|0.08}}{1 + 0.12 s_{\overline{2}|0.08}} = \frac{1000 \times (2.08)}{1 + 0.12 \times (2.08)} = 1664.53 \quad (\text{元})$$

最后得到

$$L' = \frac{B_2 + 212}{1.2544} = \frac{1664.53 + 212}{1.2544} = 1495.96 \quad (\text{元})$$

第 4 章 练习

1. 某人借款 1 万元，年利率 12%，采用分期还款方式，每年末还款 2000 元，剩余不足 2000 元的部分在最后一次 2000 元还款的下一年偿还。计算第 5 次偿还款后的贷款余额。
2. 甲借款 X，为期 10 年，年利率 8%，如他在第 10 年末一次性偿还贷款本利和，其中的利息部分要比分 10 年期均衡偿还的利息部分多 468.05 元，计算 X。
3. 一笔贷款每季末偿还一次，每次还款 1500 元，每年计息 4 次的年名义利率为 10%。如第 1 年末的贷款余额为 12000 元，计算最初贷款额。
4. 某人贷款 1 万元，为期 10 年，年利率为 i，按偿债基金方式偿还贷款，每年末支出款为 X，其中包括利息支出和偿债基金存款支出，偿债基金存款利率为 8%。如贷款利率为 $2i$，那么该借款人每年需支出款为 $1.5X$，计算 i。
5. 某人购买住房，贷款 10 万元，分 10 年偿还，每月末还款一次，年利率满足 $(1+i)^4 = 1.5$。计算还款 40 次后的贷款余额。
6. 某可调利率的抵押贷款额为 23115 元，为期 10 年，每季末还款 1000 元，初始贷款利率为年计息 4 次的年名义利率 12%。在进行完第 12 次还款后，贷款利率上调为每年计息 4 次的年名义利率 14%，每季度末保持还款 1000 元，计算第 24 次还款后的贷款余额。
7. 某贷款分 20 年均衡偿还，年利率为 9%，在哪一次偿还款中，偿还的利息部分最接近于偿还的本金部分?
8. 张某借款 1000 元，年利率为 i，计划在第 6 年末还款 1000 元，第 12 年末还款 1366.87 元。在第一次还款后第三年，他提前偿还了全部贷款余额，计算这次偿还额。
9. 某贷款为期 5 年，每季末偿还一次，每年计息 4 次的年名义利率为 10%，如第 3 次还款中的本金部分为 100 元，计算最后 5 次还款中的本金部分。
10. 某贷款为期 35 年，分期均衡偿还，每年末还款一次，第 8 次还款中的利息部分为 135 元，第 22 次还款中的利息部分为 108 元，计算第 29 次还款中的利息部分。

11. L、N 两笔贷款额相等，分 30 年偿还，年利率 4%，L 贷款每次还款额相等，N 贷款的 30 次还款中，每次还款所包含的本金部分相等，包含的另一部分是基于贷款余额所产生的利息，L 贷款的偿还款首次超过 N 贷款偿还款的时间为 t，计算 t 。
12. 某项贷款为 125000 元，期限为 30 年，每月末分期偿还，每次偿还额比前一次偿还额多 0.2%，第一次还款额为 P，年利率为 5%，计算 P。
13. 某贷款为期 5 年，每半年末还款额为 1，每年计息 2 次的年名义利率为 i，计算第 8 次还款中的本金部分。
14. 甲借款人每年末还款 3000 元。如第三次还款中的利息部分为 2000 元，每年计息 4 次的年名义利率为 10%，计算第 6 次还款中的本金部分。
15. 某投资人购买一种确定年金，每季末可得 500 元，共 10 年，年利率为 8%，计算该投资人的利息收入。
16. 甲购买住宅，价值 10 万元，按月分期付款，为期 30 年。首次付款发生在购房第 1 月末，年利率为 5%。10 年后，每次付款额增加 325.40 元，以便较快还完购房款，计算整个还款期间的利息支出。
17. 乙贷款利率为每年 5%，每年末还款一次，共 10 年，首期还款为 200 元，以后每期比前期增加 10 元，计算第 5 次还款中的利息部分。
18. 甲借款 2000 元，年利率 10%，每年末还款一次，首次还款额为 400 元，以后每次还款额比上一次多 4%，最后的还款零头在最后一次规则还款一年后偿还，计算：
    （1）第三年末的贷款余额（还款后）；
    （2）第三次还款中的本金部分。
19. 某人借款 1 万元，为期 10 年，年利率 5%，采用偿债基金法偿还贷款，偿债基金存款利率为 3%，还款在每年末进行。在第 5 次还款前，贷款人要求借款人一次性偿还贷款余额，计算借款人在第 5 年末的总的支出款（包括利息和本金）。
20. 甲借款 1 万元，年利率 10%，其偿债基金年存款利率为 8% 。第 10 年末，偿债基金积累额为 5000 元，第 11 年末，甲的还款支出额为 1500 元，计算:
    （1）第 11 次还款中的利息部分；
    （2）第 11 次还款中的本金部分；
    （3）第 11 年的净本金支出额；
    （4）第 11 年末的偿债基金积累额。
21. 某项贷款为 1 万元，年利率 9%。借款人在年末支付利息，且每年初向偿债基金存款 X 元，存款利率为 7%，第 10 年末偿债基金积累额达 1 万元，计算 X。
22. 某人借款 12000 元，为期 10 年，前 5 年为每年计息 2 次的年名义利率 12%，后 5 年为每年计息 2 次的年名义利率 10%，借款人每半年末支出款项为 1000 元，一部分作为贷款利息，另一部分作为偿债基金存款，偿债基金年名义存款利率为 8%，每年计息两次。计算在第 10 年末，贷款额与偿债基金积累额之差。
23. 某人每年末支付 36000 元偿还贷款，共 31 年，贷款额为 40 万元，如借款额按偿债基金法计算（偿债基金存款利率为 3%），计算贷款人的贷款利率。

24. 甲借款 10 万元，期限为 20 年，已知:

（1）按偿债基金法还款，偿债基金存款利率为 3%；

（2）首期支出款为 X，发生在第 1 年末；

（3）以后每年末还款支出额比前一年增加 50 元，直至贷款期末；

（4）贷款年利率为 5%。

计算 X。

部分习题参考答案

第一章答案

1. $\dfrac{41-7\sqrt{3}}{118}$

5. 7.62%

7. 1144.97

8. 794.10

9. 1.433

10. 1.82

11. 4.44%

第二章答案

4. 1800

5. 32.41

6. 166.76

7. 10.10

8. 186.13

10. 2606

11. 84.5

第三章答案

1. $\dfrac{1}{3}$

2. 653，578.5，19.76%

3. 461.39

4. $k=0.1412$

6. 10235.177

7. 1

8. (1)6.52%；(2)9.54%

9. 4.5%

10. 据净现值法或收益率法计算可知，选择第一种

11. 0.003561

第四章答案

1. 4917.72

2. 700

3. 16514

4. 6.9%

5. 77103.81

6. 13752.39

7. 13

8. 1026.95

9. 724.59

10. 72

11. 13

12. 493.85

13. $\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{-3}$

14. 1344.89

15. 6183.69

16. 66261.1

17. 66.89

18. 1287.76，276.24

19. 6741.12

20. 1000，500，900，5900

21. 676.43

22. 2221.41

23. 7%

24. 8295.43

附录 A 利息函数表

本附录以表格形式记录了常见利率的利息函数以及标准年金的现值和积累值，供读者参考。下表提供了不同利率下利息函数表的具体位置：

年利率 (i)	对应页码
0.005	75
0.010	76
0.015	77
0.020	78
0.025	79
0.030	80
0.035	81
0.040	82
0.045	83
0.050	84
0.060	85
0.070	86
0.080	87
0.090	88
0.100	89
0.120	90
0.150	91
0.200	92

常量	
函数	值
i	0.005000
$i^{(2)}$	0.004994
$i^{(4)}$	0.004991
$i^{(12)}$	0.004989
δ	0.004988
d	0.004975
$d^{(2)}$	0.004981
$d^{(4)}$	0.004984
$d^{(12)}$	0.004987
δ	0.004988
v	0.995025
$v^{1/2}$	0.997509
$v^{1/4}$	0.998754
$v^{1/12}$	0.999584
$1+i$	1.005000
$(1+i)^{1/2}$	1.002497
$(1+i)^{1/4}$	1.001248
$(1+i)^{1/12}$	1.000416
$i/i^{(2)}$	1.001248
$i/i^{(4)}$	1.001873
$i/i^{(12)}$	1.002290
i/δ	1.002498
$i/d^{(2)}$	1.003748
$i/d^{(4)}$	1.003123
$i/d^{(12)}$	1.002706
i/δ	1.002498

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.995025	1.00500	0.99502	1.00000	1.000000
2	0.990075	1.01003	1.98510	2.00500	0.498753
3	0.985149	1.01508	2.97025	3.01502	0.331672
4	0.980248	1.02015	3.95050	4.03010	0.248133
5	0.975371	1.02525	4.92587	5.05025	0.198010
6	0.970518	1.03038	5.89638	6.07550	0.164595
7	0.965690	1.03553	6.86207	7.10588	0.140729
8	0.960885	1.04071	7.82296	8.14141	0.122829
9	0.956105	1.04591	8.77906	9.18212	0.108907
10	0.951348	1.05114	9.73041	10.22803	0.097771
11	0.946615	1.05640	10.67703	11.27917	0.088659
12	0.941905	1.06168	11.61893	12.33556	0.081066
13	0.937219	1.06699	12.55615	13.39724	0.074642
14	0.932556	1.07232	13.48871	14.46423	0.069136
15	0.927917	1.07768	14.41662	15.53655	0.064364
16	0.923300	1.08307	15.33993	16.61423	0.060189
17	0.918707	1.08849	16.25863	17.69730	0.056506
18	0.914136	1.09393	17.17277	18.78579	0.053232
19	0.909588	1.09940	18.08236	19.87972	0.050303
20	0.905063	1.10490	18.98742	20.97912	0.047666
21	0.900560	1.11042	19.88798	22.08401	0.045282
22	0.896080	1.11597	20.78406	23.19443	0.043114
23	0.891622	1.12155	21.67568	24.31040	0.041135
24	0.887186	1.12716	22.56287	25.43196	0.039321
25	0.882772	1.13280	23.44564	26.55912	0.037652
26	0.878380	1.13846	24.32402	27.69191	0.036112
27	0.874010	1.14415	25.19803	28.83037	0.034686
28	0.869662	1.14987	26.06769	29.97452	0.033362
29	0.865335	1.15562	26.93302	31.12439	0.032129
30	0.861030	1.16140	27.79405	32.28002	0.030979
31	0.856746	1.16721	28.65080	33.44142	0.029903
32	0.852484	1.17304	29.50328	34.60862	0.028895
33	0.848242	1.17891	30.35153	35.78167	0.027947
34	0.844022	1.18480	31.19555	36.96058	0.027056
35	0.839823	1.19073	32.03537	38.14538	0.026215
36	0.835645	1.19668	32.87102	39.33610	0.025422
37	0.831487	1.20266	33.70250	40.53279	0.024671
38	0.827351	1.20868	34.52985	41.73545	0.023960
39	0.823235	1.21472	35.35309	42.94413	0.023286
40	0.819139	1.22079	36.17223	44.15885	0.022646
41	0.815064	1.22690	36.98729	45.37964	0.022036
42	0.811009	1.23303	37.79830	46.60654	0.021456
43	0.806974	1.23920	38.60527	47.83957	0.020903
44	0.802959	1.24539	39.40823	49.07877	0.020375
45	0.798964	1.25162	40.20720	50.32416	0.019871
46	0.794989	1.25788	41.00219	51.57578	0.019389
47	0.791034	1.26417	41.79322	52.83366	0.018927
48	0.787098	1.27049	42.58032	54.09783	0.018485
49	0.783182	1.27684	43.36350	55.36832	0.018061
50	0.779286	1.28323	44.14279	56.64516	0.017654

常量	
函数	值
i	0.010000
$i^{(2)}$	0.009975
$i^{(4)}$	0.009963
$i^{(12)}$	0.009954
δ	0.009950
d	0.009901
$d^{(2)}$	0.009926
$d^{(4)}$	0.009938
$d^{(12)}$	0.009946
δ	0.009950
v	0.990099
$v^{1/2}$	0.995037
$v^{1/4}$	0.997516
$v^{1/12}$	0.999171
$1+i$	1.010000
$(1+i)^{1/2}$	1.004988
$(1+i)^{1/4}$	1.002491
$(1+i)^{1/12}$	1.000830
$i/i^{(2)}$	1.002494
$i/i^{(4)}$	1.003742
$i/i^{(12)}$	1.004575
i/δ	1.004992
$i/d^{(2)}$	1.007494
$i/d^{(4)}$	1.006242
$i/d^{(12)}$	1.005408
i/δ	1.004992

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.990099	1.01000	0.99010	1.00000	1.000000
2	0.980296	1.02010	1.97040	2.01000	0.497512
3	0.970590	1.03030	2.94099	3.03010	0.330022
4	0.960980	1.04060	3.90197	4.06040	0.246281
5	0.951466	1.05101	4.85343	5.10101	0.196040
6	0.942045	1.06152	5.79548	6.15202	0.162548
7	0.932718	1.07214	6.72819	7.21354	0.138628
8	0.923483	1.08286	7.65168	8.28567	0.120690
9	0.914340	1.09369	8.56602	9.36853	0.106740
10	0.905287	1.10462	9.47130	10.46221	0.095582
11	0.896324	1.11567	10.36763	11.56683	0.086454
12	0.887449	1.12683	11.25508	12.68250	0.078849
13	0.878663	1.13809	12.13374	13.80933	0.072415
14	0.869963	1.14947	13.00370	14.94742	0.066901
15	0.861349	1.16097	13.86505	16.09690	0.062124
16	0.852821	1.17258	14.71787	17.25786	0.057945
17	0.844377	1.18430	15.56225	18.43044	0.054258
18	0.836017	1.19615	16.39827	19.61475	0.050982
19	0.827740	1.20811	17.22601	20.81090	0.048052
20	0.819544	1.22019	18.04555	22.01900	0.045415
21	0.811430	1.23239	18.85698	23.23919	0.043031
22	0.803396	1.24472	19.66038	24.47159	0.040864
23	0.795442	1.25716	20.45582	25.71630	0.038886
24	0.787566	1.26973	21.24339	26.97346	0.037073
25	0.779768	1.28243	22.02316	28.24320	0.035407
26	0.772048	1.29526	22.79520	29.52563	0.033869
27	0.764404	1.30821	23.55961	30.82089	0.032446
28	0.756836	1.32129	24.31644	32.12910	0.031124
29	0.749342	1.33450	25.06579	33.45039	0.029895
30	0.741923	1.34785	25.80771	34.78489	0.028748
31	0.734577	1.36133	26.54229	36.13274	0.027676
32	0.727304	1.37494	27.26959	37.49407	0.026671
33	0.720103	1.38869	27.98969	38.86901	0.025727
34	0.712973	1.40258	28.70267	40.25770	0.024840
35	0.705914	1.41660	29.40858	41.66028	0.024004
36	0.698925	1.43077	30.10751	43.07688	0.023214
37	0.692005	1.44508	30.79951	44.50765	0.022468
38	0.685153	1.45953	31.48466	45.95272	0.021761
39	0.678370	1.47412	32.16303	47.41225	0.021092
40	0.671653	1.48886	32.83469	48.88637	0.020456
41	0.665003	1.50375	33.49969	50.37524	0.019851
42	0.658419	1.51879	34.15811	51.87899	0.019276
43	0.651900	1.53398	34.81001	53.39778	0.018727
44	0.645445	1.54932	35.45545	54.93176	0.018204
45	0.639055	1.56481	36.09451	56.48107	0.017705
46	0.632728	1.58046	36.72724	58.04589	0.017228
47	0.626463	1.59626	37.35370	59.62634	0.016771
48	0.620260	1.61223	37.97396	61.22261	0.016334
49	0.614119	1.62835	38.58808	62.83483	0.015915
50	0.608039	1.64463	39.19612	64.46318	0.015513

常量	
函数	值
i	0.015000
$i^{(2)}$	0.014944
$i^{(4)}$	0.014916
$i^{(12)}$	0.014898
δ	0.014889
d	0.014778
$d^{(2)}$	0.014833
$d^{(4)}$	0.014861
$d^{(12)}$	0.014879
δ	0.014889
v	0.985222
$v^{1/2}$	0.992583
$v^{1/4}$	0.996285
$v^{1/12}$	0.998760
$1+i$	1.015000
$(1+i)^{1/2}$	1.007472
$(1+i)^{1/4}$	1.003729
$(1+i)^{1/12}$	1.001241
$i/i^{(2)}$	1.003736
$i/i^{(4)}$	1.005608
$i/i^{(12)}$	1.006857
i/δ	1.007481
$i/d^{(2)}$	1.011236
$i/d^{(4)}$	1.009358
$i/d^{(12)}$	1.008107
i/δ	1.007481

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.985222	1.01500	0.98522	1.00000	1.000000
2	0.970662	1.03023	1.95588	2.01500	0.496278
3	0.956317	1.04568	2.91220	3.04522	0.328383
4	0.942184	1.06136	3.85438	4.09090	0.244445
5	0.928260	1.07728	4.78264	5.15227	0.194089
6	0.914542	1.09344	5.69719	6.22955	0.160525
7	0.901027	1.10984	6.59821	7.32299	0.136556
8	0.887711	1.12649	7.48593	8.43284	0.118584
9	0.874592	1.14339	8.36052	9.55933	0.104610
10	0.861667	1.16054	9.22218	10.70272	0.093434
11	0.848933	1.17795	10.07112	11.86326	0.084294
12	0.836387	1.19562	10.90751	13.04121	0.076680
13	0.824027	1.21355	11.73153	14.23683	0.070240
14	0.811849	1.23176	12.54338	15.45038	0.064723
15	0.799852	1.25023	13.34323	16.68214	0.059944
16	0.788031	1.26899	14.13126	17.93237	0.055765
17	0.776385	1.28802	14.90765	19.20136	0.052080
18	0.764912	1.30734	15.67256	20.48938	0.048806
19	0.753607	1.32695	16.42617	21.79672	0.045878
20	0.742470	1.34686	17.16864	23.12367	0.043246
21	0.731498	1.36706	17.90014	24.47052	0.040865
22	0.720688	1.38756	18.62082	25.83758	0.038703
23	0.710037	1.40838	19.33086	27.22514	0.036731
24	0.699544	1.42950	20.03041	28.63352	0.034924
25	0.689206	1.45095	20.71961	30.06302	0.033263
26	0.679021	1.47271	21.39863	31.51397	0.031732
27	0.668986	1.49480	22.06762	32.98668	0.030315
28	0.659099	1.51722	22.72672	34.48148	0.029001
29	0.649359	1.53998	23.37608	35.99870	0.027779
30	0.639762	1.56308	24.01584	37.53868	0.026639
31	0.630308	1.58653	24.64615	39.10176	0.025574
32	0.620993	1.61032	25.26714	40.68829	0.024577
33	0.611816	1.63448	25.87895	42.29861	0.023641
34	0.602774	1.65900	26.48173	43.93309	0.022762
35	0.593866	1.68388	27.07559	45.59209	0.021934
36	0.585090	1.70914	27.66068	47.27597	0.021152
37	0.576443	1.73478	28.23713	48.98511	0.020414
38	0.567924	1.76080	28.80505	50.71989	0.019716
39	0.559531	1.78721	29.36458	52.48068	0.019055
40	0.551262	1.81402	29.91585	54.26789	0.018427
41	0.543116	1.84123	30.45896	56.08191	0.017831
42	0.535089	1.86885	30.99405	57.92314	0.017264
43	0.527182	1.89688	31.52123	59.79199	0.016725
44	0.519391	1.92533	32.04062	61.68887	0.016210
45	0.511715	1.95421	32.55234	63.61420	0.015720
46	0.504153	1.98353	33.05649	65.56841	0.015251
47	0.496702	2.01328	33.55319	67.55194	0.014803
48	0.489362	2.04348	34.04255	69.56522	0.014375
49	0.482130	2.07413	34.52468	71.60870	0.013965
50	0.475005	2.10524	34.99969	73.68283	0.013572

常量	
函数	值
i	0.020000
$i^{(2)}$	0.019901
$i^{(4)}$	0.019852
$i^{(12)}$	0.019819
δ	0.019803
d	0.019608
$d^{(2)}$	0.019705
$d^{(4)}$	0.019754
$d^{(12)}$	0.019786
δ	0.019803
v	0.980392
$v^{1/2}$	0.990148
$v^{1/4}$	0.995062
$v^{1/12}$	0.998351
$1+i$	1.020000
$(1+i)^{1/2}$	1.009950
$(1+i)^{1/4}$	1.004963
$(1+i)^{1/12}$	1.001652
$i/i^{(2)}$	1.004975
$i/i^{(4)}$	1.007469
$i/i^{(12)}$	1.009134
i/δ	1.009967
$i/d^{(2)}$	1.014975
$i/d^{(4)}$	1.012469
$i/d^{(12)}$	1.010801
i/δ	1.009967

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.980392	1.02000	0.98039	1.00000	1.000000
2	0.961169	1.04040	1.94156	2.02000	0.495050
3	0.942322	1.06121	2.88388	3.06040	0.326755
4	0.923845	1.08243	3.80773	4.12161	0.242624
5	0.905731	1.10408	4.71346	5.20404	0.192158
6	0.887971	1.12616	5.60143	6.30812	0.158526
7	0.870560	1.14869	6.47199	7.43428	0.134512
8	0.853490	1.17166	7.32548	8.58297	0.116510
9	0.836755	1.19509	8.16224	9.75463	0.102515
10	0.820348	1.21899	8.98259	10.94972	0.091327
11	0.804263	1.24337	9.78685	12.16872	0.082178
12	0.788493	1.26824	10.57534	13.41209	0.074560
13	0.773033	1.29361	11.34837	14.68033	0.068118
14	0.757875	1.31948	12.10625	15.97394	0.062602
15	0.743015	1.34587	12.84926	17.29342	0.057825
16	0.728446	1.37279	13.57771	18.63929	0.053650
17	0.714163	1.40024	14.29187	20.01207	0.049970
18	0.700159	1.42825	14.99203	21.41231	0.046702
19	0.686431	1.45681	15.67846	22.84056	0.043782
20	0.672971	1.48595	16.35143	24.29737	0.041157
21	0.659776	1.51567	17.01121	25.78332	0.038785
22	0.646839	1.54598	17.65805	27.29898	0.036631
23	0.634156	1.57690	18.29220	28.84496	0.034668
24	0.621721	1.60844	18.91393	30.42186	0.032871
25	0.609531	1.64061	19.52346	32.03030	0.031220
26	0.597579	1.67342	20.12104	33.67091	0.029699
27	0.585862	1.70689	20.70690	35.34432	0.028293
28	0.574375	1.74102	21.28127	37.05121	0.026990
29	0.563112	1.77584	21.84438	38.79223	0.025778
30	0.552071	1.81136	22.39646	40.56808	0.024650
31	0.541246	1.84759	22.93770	42.37944	0.023596
32	0.530633	1.88454	23.46833	44.22703	0.022611
33	0.520229	1.92223	23.98856	46.11157	0.021687
34	0.510028	1.96068	24.49859	48.03380	0.020819
35	0.500028	1.99989	24.99862	49.99448	0.020002
36	0.490223	2.03989	25.48884	51.99437	0.019233
37	0.480611	2.08069	25.96945	54.03425	0.018507
38	0.471187	2.12230	26.44064	56.11494	0.017821
39	0.461948	2.16474	26.90259	58.23724	0.017171
40	0.452890	2.20804	27.35548	60.40198	0.016556
41	0.444010	2.25220	27.79949	62.61002	0.015972
42	0.435304	2.29724	28.23479	64.86222	0.015417
43	0.426769	2.34319	28.66156	67.15947	0.014890
44	0.418401	2.39005	29.07996	69.50266	0.014388
45	0.410197	2.43785	29.49016	71.89271	0.013910
46	0.402154	2.48661	29.89231	74.33056	0.013453
47	0.394268	2.53634	30.28658	76.81718	0.013018
48	0.386538	2.58707	30.67312	79.35352	0.012602
49	0.378958	2.63881	31.05208	81.94059	0.012204
50	0.371528	2.69159	31.42361	84.57940	0.011823

常量	
函数	值
i	0.025000
$i^{(2)}$	0.024846
$i^{(4)}$	0.024769
$i^{(12)}$	0.024718
δ	0.024693
d	0.024390
$d^{(2)}$	0.024541
$d^{(4)}$	0.024617
$d^{(12)}$	0.024667
δ	0.024693
v	0.975610
$v^{1/2}$	0.987730
$v^{1/4}$	0.993846
$v^{1/12}$	0.997944
$1+i$	1.025000
$(1+i)^{1/2}$	1.012423
$(1+i)^{1/4}$	1.006192
$(1+i)^{1/12}$	1.002060
$i/i^{(2)}$	1.006211
$i/i^{(4)}$	1.009327
$i/i^{(12)}$	1.011407
i/δ	1.012449
$i/d^{(2)}$	1.018711
$i/d^{(4)}$	1.015577
$i/d^{(12)}$	1.013491
i/δ	1.012449

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.975610	1.02500	0.97561	1.00000	1.000000
2	0.951814	1.05063	1.92742	2.02500	0.493827
3	0.928599	1.07689	2.85602	3.07563	0.325137
4	0.905951	1.10381	3.76197	4.15252	0.240818
5	0.883854	1.13141	4.64583	5.25633	0.190247
6	0.862297	1.15969	5.50813	6.38774	0.156550
7	0.841265	1.18869	6.34939	7.54743	0.132495
8	0.820747	1.21840	7.17014	8.73612	0.114467
9	0.800728	1.24886	7.97087	9.95452	0.100457
10	0.781198	1.28008	8.75206	11.20338	0.089259
11	0.762145	1.31209	9.51421	12.48347	0.080106
12	0.743556	1.34489	10.25776	13.79555	0.072487
13	0.725420	1.37851	10.98318	15.14044	0.066048
14	0.707727	1.41297	11.69091	16.51895	0.060537
15	0.690466	1.44830	12.38138	17.93193	0.055766
16	0.673625	1.48451	13.05500	19.38022	0.051599
17	0.657195	1.52162	13.71220	20.86473	0.047928
18	0.641166	1.55966	14.35336	22.38635	0.044670
19	0.625528	1.59865	14.97889	23.94601	0.041761
20	0.610271	1.63862	15.58916	25.54466	0.039147
21	0.595386	1.67958	16.18455	27.18327	0.036787
22	0.580865	1.72157	16.76541	28.86286	0.034647
23	0.566697	1.76461	17.33211	30.58443	0.032696
24	0.552875	1.80873	17.88499	32.34904	0.030913
25	0.539391	1.85394	18.42438	34.15776	0.029276
26	0.526235	1.90029	18.95061	36.01171	0.027769
27	0.513400	1.94780	19.46401	37.91200	0.026377
28	0.500878	1.99650	19.96489	39.85980	0.025088
29	0.488661	2.04641	20.45355	41.85630	0.023891
30	0.476743	2.09757	20.93029	43.90270	0.022778
31	0.465115	2.15001	21.39541	46.00027	0.021739
32	0.453771	2.20376	21.84918	48.15028	0.020768
33	0.442703	2.25885	22.29188	50.35403	0.019859
34	0.431905	2.31532	22.72379	52.61289	0.019007
35	0.421371	2.37321	23.14516	54.92821	0.018206
36	0.411094	2.43254	23.55625	57.30141	0.017452
37	0.401067	2.49335	23.95732	59.73395	0.016741
38	0.391285	2.55568	24.34860	62.22730	0.016070
39	0.381741	2.61957	24.73034	64.78298	0.015436
40	0.372431	2.68506	25.10278	67.40255	0.014836
41	0.363347	2.75219	25.46612	70.08762	0.014268
42	0.354485	2.82100	25.82061	72.83981	0.013729
43	0.345839	2.89152	26.16645	75.66080	0.013217
44	0.337404	2.96381	26.50385	78.55232	0.012730
45	0.329174	3.03790	26.83302	81.51613	0.012268
46	0.321146	3.11385	27.15417	84.55403	0.011827
47	0.313313	3.19170	27.46748	87.66789	0.011407
48	0.305671	3.27149	27.77315	90.85958	0.011006
49	0.298216	3.35328	28.07137	94.13107	0.010623
50	0.290942	3.43711	28.36231	97.48435	0.010258

常量	
函数	值
i	0.030000
$i^{(2)}$	0.029778
$i^{(4)}$	0.029668
$i^{(12)}$	0.029595
δ	0.029559
d	0.029126
$d^{(2)}$	0.029341
$d^{(4)}$	0.029450
$d^{(12)}$	0.029522
δ	0.029559
v	0.970874
$v^{1/2}$	0.985329
$v^{1/4}$	0.992638
$v^{1/12}$	0.997540
$1+i$	1.030000
$(1+i)^{1/2}$	1.014889
$(1+i)^{1/4}$	1.007417
$(1+i)^{1/12}$	1.002466
$i/i^{(2)}$	1.007445
$i/i^{(4)}$	1.011181
$i/i^{(12)}$	1.013677
i/δ	1.014926
$i/d^{(2)}$	1.022445
$i/d^{(4)}$	1.018681
$i/d^{(12)}$	1.016177
i/δ	1.014926

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.970874	1.03000	0.97087	1.00000	1.000000
2	0.942596	1.06090	1.91347	2.03000	0.492611
3	0.915142	1.09273	2.82861	3.09090	0.323530
4	0.888487	1.12551	3.71710	4.18363	0.239027
5	0.862609	1.15927	4.57971	5.30914	0.188355
6	0.837484	1.19405	5.41719	6.46841	0.154598
7	0.813092	1.22987	6.23028	7.66246	0.130506
8	0.789409	1.26677	7.01969	8.89234	0.112456
9	0.766417	1.30477	7.78611	10.15911	0.098434
10	0.744094	1.34392	8.53020	11.46388	0.087231
11	0.722421	1.38423	9.25262	12.80780	0.078077
12	0.701380	1.42576	9.95400	14.19203	0.070462
13	0.680951	1.46853	10.63496	15.61779	0.064030
14	0.661118	1.51259	11.29607	17.08632	0.058526
15	0.641862	1.55797	11.93794	18.59891	0.053767
16	0.623167	1.60471	12.56110	20.15688	0.049611
17	0.605016	1.65285	13.16612	21.76159	0.045953
18	0.587395	1.70243	13.75351	23.41444	0.042709
19	0.570286	1.75351	14.32380	25.11687	0.039814
20	0.553676	1.80611	14.87747	26.87037	0.037216
21	0.537549	1.86029	15.41502	28.67649	0.034872
22	0.521893	1.91610	15.93692	30.53678	0.032747
23	0.506692	1.97359	16.44361	32.45288	0.030814
24	0.491934	2.03279	16.93554	34.42647	0.029047
25	0.477606	2.09378	17.41315	36.45926	0.027428
26	0.463695	2.15659	17.87684	38.55304	0.025938
27	0.450189	2.22129	18.32703	40.70963	0.024564
28	0.437077	2.28793	18.76411	42.93092	0.023293
29	0.424346	2.35657	19.18845	45.21885	0.022115
30	0.411987	2.42726	19.60044	47.57542	0.021019
31	0.399987	2.50008	20.00043	50.00268	0.019999
32	0.388337	2.57508	20.38877	52.50276	0.019047
33	0.377026	2.65234	20.76579	55.07784	0.018156
34	0.366045	2.73191	21.13184	57.73018	0.017322
35	0.355383	2.81386	21.48722	60.46208	0.016539
36	0.345032	2.89828	21.83225	63.27594	0.015804
37	0.334983	2.98523	22.16724	66.17422	0.015112
38	0.325226	3.07478	22.49246	69.15945	0.014459
39	0.315754	3.16703	22.80822	72.23423	0.013844
40	0.306557	3.26204	23.11477	75.40126	0.013262
41	0.297628	3.35990	23.41240	78.66330	0.012712
42	0.288959	3.46070	23.70136	82.02320	0.012192
43	0.280543	3.56452	23.98190	85.48389	0.011698
44	0.272372	3.67145	24.25427	89.04841	0.011230
45	0.264439	3.78160	24.51871	92.71986	0.010785
46	0.256737	3.89504	24.77545	96.50146	0.010363
47	0.249259	4.01190	25.02471	100.39650	0.009961
48	0.241999	4.13225	25.26671	104.40840	0.009578
49	0.234950	4.25622	25.50166	108.54065	0.009213
50	0.228107	4.38391	25.72976	112.79687	0.008865

常量	
函数	值
i	0.035000
$i^{(2)}$	0.034699
$i^{(4)}$	0.034550
$i^{(12)}$	0.034451
δ	0.034401
d	0.033816
$d^{(2)}$	0.034107
$d^{(4)}$	0.034254
$d^{(12)}$	0.034352
δ	0.034401
v	0.966184
$v^{1/2}$	0.982946
$v^{1/4}$	0.991437
$v^{1/12}$	0.997137
$1+i$	1.035000
$(1+i)^{1/2}$	1.017349
$(1+i)^{1/4}$	1.008637
$(1+i)^{1/12}$	1.002871
$i/i^{(2)}$	1.008675
$i/i^{(4)}$	1.013031
$i/i^{(12)}$	1.015942
i/δ	1.017400
$i/d^{(2)}$	1.026175
$i/d^{(4)}$	1.021781
$i/d^{(12)}$	1.018859
i/δ	1.017400

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.966184	1.03500	0.96618	1.00000	1.000000
2	0.933511	1.07123	1.89969	2.03500	0.491400
3	0.901943	1.10872	2.80164	3.10622	0.321934
4	0.871442	1.14752	3.67308	4.21494	0.237251
5	0.841973	1.18769	4.51505	5.36247	0.186481
6	0.813501	1.22926	5.32855	6.55015	0.152668
7	0.785991	1.27228	6.11454	7.77941	0.128544
8	0.759412	1.31681	6.87396	9.05169	0.110477
9	0.733731	1.36290	7.60769	10.36850	0.096446
10	0.708919	1.41060	8.31661	11.73139	0.085241
11	0.684946	1.45997	9.00155	13.14199	0.076092
12	0.661783	1.51107	9.66333	14.60196	0.068484
13	0.639404	1.56396	10.30274	16.11303	0.062062
14	0.617782	1.61869	10.92052	17.67699	0.056571
15	0.596891	1.67535	11.51741	19.29568	0.051825
16	0.576706	1.73399	12.09412	20.97103	0.047685
17	0.557204	1.79468	12.65132	22.70502	0.044043
18	0.538361	1.85749	13.18968	24.49969	0.040817
19	0.520156	1.92250	13.70984	26.35718	0.037940
20	0.502566	1.98979	14.21240	28.27968	0.035361
21	0.485571	2.05943	14.69797	30.26947	0.033037
22	0.469151	2.13151	15.16712	32.32890	0.030932
23	0.453286	2.20611	15.62041	34.46041	0.029019
24	0.437957	2.28333	16.05837	36.66653	0.027273
25	0.423147	2.36324	16.48151	38.94986	0.025674
26	0.408838	2.44596	16.89035	41.31310	0.024205
27	0.395012	2.53157	17.28536	43.75906	0.022852
28	0.381654	2.62017	17.66702	46.29063	0.021603
29	0.368748	2.71188	18.03577	48.91080	0.020445
30	0.356278	2.80679	18.39205	51.62268	0.019371
31	0.344230	2.90503	18.73628	54.42947	0.018372
32	0.332590	3.00671	19.06887	57.33450	0.017442
33	0.321343	3.11194	19.39021	60.34121	0.016572
34	0.310476	3.22086	19.70068	63.45315	0.015760
35	0.299977	3.33359	20.00066	66.67401	0.014998
36	0.289833	3.45027	20.29049	70.00760	0.014284
37	0.280032	3.57103	20.57053	73.45787	0.013613
38	0.270562	3.69601	20.84109	77.02889	0.012982
39	0.261413	3.82537	21.10250	80.72491	0.012388
40	0.252572	3.95926	21.35507	84.55028	0.011827
41	0.244031	4.09783	21.59910	88.50954	0.011298
42	0.235779	4.24126	21.83488	92.60737	0.010798
43	0.227806	4.38970	22.06269	96.84863	0.010325
44	0.220102	4.54334	22.28279	101.23833	0.009878
45	0.212659	4.70236	22.49545	105.78167	0.009453
46	0.205468	4.86694	22.70092	110.48403	0.009051
47	0.198520	5.03728	22.89944	115.35097	0.008669
48	0.191806	5.21359	23.09124	120.38826	0.008306
49	0.185320	5.39606	23.27656	125.60185	0.007962
50	0.179053	5.58493	23.45562	130.99791	0.007634

常量	
函数	值
i	0.040000
$i^{(2)}$	0.039608
$i^{(4)}$	0.039414
$i^{(12)}$	0.039285
δ	0.039221
d	0.038462
$d^{(2)}$	0.038839
$d^{(4)}$	0.039029
$d^{(12)}$	0.039157
δ	0.039221
v	0.961538
$v^{1/2}$	0.980581
$v^{1/4}$	0.990243
$v^{1/12}$	0.996737
$1+i$	1.040000
$(1+i)^{1/2}$	1.019804
$(1+i)^{1/4}$	1.009853
$(1+i)^{1/12}$	1.003274
$i/i^{(2)}$	1.009902
$i/i^{(4)}$	1.014877
$i/i^{(12)}$	1.018204
i/δ	1.019869
$i/d^{(2)}$	1.029902
$i/d^{(4)}$	1.024877
$i/d^{(12)}$	1.021537
i/δ	1.019869

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.961538	1.04000	0.96154	1.00000	1.000000
2	0.924556	1.08160	1.88609	2.04000	0.490196
3	0.888996	1.12486	2.77509	3.12160	0.320349
4	0.854804	1.16986	3.62990	4.24646	0.235490
5	0.821927	1.21665	4.45182	5.41632	0.184627
6	0.790315	1.26532	5.24214	6.63298	0.150762
7	0.759918	1.31593	6.00205	7.89829	0.126610
8	0.730690	1.36857	6.73274	9.21423	0.108528
9	0.702587	1.42331	7.43533	10.58280	0.094493
10	0.675564	1.48024	8.11090	12.00611	0.083291
11	0.649581	1.53945	8.76048	13.48635	0.074149
12	0.624597	1.60103	9.38507	15.02581	0.066552
13	0.600574	1.66507	9.98565	16.62684	0.060144
14	0.577475	1.73168	10.56312	18.29191	0.054669
15	0.555265	1.80094	11.11839	20.02359	0.049941
16	0.533908	1.87298	11.65230	21.82453	0.045820
17	0.513373	1.94790	12.16567	23.69751	0.042199
18	0.493628	2.02582	12.65930	25.64541	0.038993
19	0.474642	2.10685	13.13394	27.67123	0.036139
20	0.456387	2.19112	13.59033	29.77808	0.033582
21	0.438834	2.27877	14.02916	31.96920	0.031280
22	0.421955	2.36992	14.45112	34.24797	0.029199
23	0.405726	2.46472	14.85684	36.61789	0.027309
24	0.390121	2.56330	15.24696	39.08260	0.025587
25	0.375117	2.66584	15.62208	41.64591	0.024012
26	0.360689	2.77247	15.98277	44.31174	0.022567
27	0.346817	2.88337	16.32959	47.08421	0.021239
28	0.333477	2.99870	16.66306	49.96758	0.020013
29	0.320651	3.11865	16.98371	52.96629	0.018880
30	0.308319	3.24340	17.29203	56.08494	0.017830
31	0.296460	3.37313	17.58849	59.32834	0.016855
32	0.285058	3.50806	17.87355	62.70147	0.015949
33	0.274094	3.64838	18.14765	66.20953	0.015104
34	0.263552	3.79432	18.41120	69.85791	0.014315
35	0.253415	3.94609	18.66461	73.65222	0.013577
36	0.243669	4.10393	18.90828	77.59831	0.012887
37	0.234297	4.26809	19.14258	81.70225	0.012240
38	0.225285	4.43881	19.36786	85.97034	0.011632
39	0.216621	4.61637	19.58448	90.40915	0.011061
40	0.208289	4.80102	19.79277	95.02552	0.010523
41	0.200278	4.99306	19.99305	99.82654	0.010017
42	0.192575	5.19278	20.18563	104.81960	0.009540
43	0.185168	5.40050	20.37079	110.01238	0.009090
44	0.178046	5.61652	20.54884	115.41288	0.008665
45	0.171198	5.84118	20.72004	121.02939	0.008262
46	0.164614	6.07482	20.88465	126.87057	0.007882
47	0.158283	6.31782	21.04294	132.94539	0.007522
48	0.152195	6.57053	21.19513	139.26321	0.007181
49	0.146341	6.83335	21.34147	145.83373	0.006857
50	0.140713	7.10668	21.48218	152.66708	0.006550

常量	
函数	值
i	0.045000
$i^{(2)}$	0.044505
$i^{(4)}$	0.044260
$i^{(12)}$	0.044098
δ	0.044017
d	0.043062
$d^{(2)}$	0.043536
$d^{(4)}$	0.043776
$d^{(12)}$	0.043936
δ	0.044017
v	0.956938
$v^{1/2}$	0.978232
$v^{1/4}$	0.989056
$v^{1/12}$	0.996339
$1+i$	1.045000
$(1+i)^{1/2}$	1.022252
$(1+i)^{1/4}$	1.011065
$(1+i)^{1/12}$	1.003675
$i/i^{(2)}$	1.011126
$i/i^{(4)}$	1.016720
$i/i^{(12)}$	1.020461
i/δ	1.022335
$i/d^{(2)}$	1.033626
$i/d^{(4)}$	1.027970
$i/d^{(12)}$	1.024211
i/δ	1.022335

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.956938	1.04500	0.95694	1.00000	1.000000
2	0.915730	1.09203	1.87267	2.04500	0.488998
3	0.876297	1.14117	2.74896	3.13703	0.318773
4	0.838561	1.19252	3.58753	4.27819	0.233744
5	0.802451	1.24618	4.38998	5.47071	0.182792
6	0.767896	1.30226	5.15787	6.71689	0.148878
7	0.734828	1.36086	5.89270	8.01915	0.124701
8	0.703185	1.42210	6.59589	9.38001	0.106610
9	0.672904	1.48610	7.26879	10.80211	0.092574
10	0.643928	1.55297	7.91272	12.28821	0.081379
11	0.616199	1.62285	8.52892	13.84118	0.072248
12	0.589664	1.69588	9.11858	15.46403	0.064666
13	0.564272	1.77220	9.68285	17.15991	0.058275
14	0.539973	1.85194	10.22283	18.93211	0.052820
15	0.516720	1.93528	10.73955	20.78405	0.048114
16	0.494469	2.02237	11.23402	22.71934	0.044015
17	0.473176	2.11338	11.70719	24.74171	0.040418
18	0.452800	2.20848	12.15999	26.85508	0.037237
19	0.433302	2.30786	12.59329	29.06356	0.034407
20	0.414643	2.41171	13.00794	31.37142	0.031876
21	0.396787	2.52024	13.40472	33.78314	0.029601
22	0.379701	2.63365	13.78442	36.30338	0.027546
23	0.363350	2.75217	14.14777	38.93703	0.025682
24	0.347703	2.87601	14.49548	41.68920	0.023987
25	0.332731	3.00543	14.82821	44.56521	0.022439
26	0.318402	3.14068	15.14661	47.57064	0.021021
27	0.304691	3.28201	15.45130	50.71132	0.019719
28	0.291571	3.42970	15.74287	53.99333	0.018521
29	0.279015	3.58404	16.02189	57.42303	0.017415
30	0.267000	3.74532	16.28889	61.00707	0.016392
31	0.255502	3.91386	16.54439	64.75239	0.015443
32	0.244500	4.08998	16.78889	68.66625	0.014563
33	0.233971	4.27403	17.02286	72.75623	0.013745
34	0.223896	4.46636	17.24676	77.03026	0.012982
35	0.214254	4.66735	17.46101	81.49662	0.012270
36	0.205028	4.87738	17.66604	86.16397	0.011606
37	0.196199	5.09686	17.86224	91.04134	0.010984
38	0.187750	5.32622	18.04999	96.13820	0.010402
39	0.179665	5.56590	18.22966	101.46442	0.009856
40	0.171929	5.81636	18.40158	107.03032	0.009343
41	0.164525	6.07810	18.56611	112.84669	0.008862
42	0.157440	6.35162	18.72355	118.92479	0.008409
43	0.150661	6.63744	18.87421	125.27640	0.007982
44	0.144173	6.93612	19.01838	131.91384	0.007581
45	0.137964	7.24825	19.15635	138.84997	0.007202
46	0.132023	7.57442	19.28837	146.09821	0.006845
47	0.126338	7.91527	19.41471	153.67263	0.006507
48	0.120898	8.27146	19.53561	161.58790	0.006189
49	0.115692	8.64367	19.65130	169.85936	0.005887
50	0.110710	9.03264	19.76201	178.50303	0.005602

常量	
函数	值
i	0.050000
$i^{(2)}$	0.049390
$i^{(4)}$	0.049089
$i^{(12)}$	0.048889
δ	0.048790
d	0.047619
$d^{(2)}$	0.048200
$d^{(4)}$	0.048494
$d^{(12)}$	0.048691
δ	0.048790
v	0.952381
$v^{1/2}$	0.975900
$v^{1/4}$	0.987877
$v^{1/12}$	0.995942
$1+i$	1.050000
$(1+i)^{1/2}$	1.024695
$(1+i)^{1/4}$	1.012272
$(1+i)^{1/12}$	1.004074
$i/i^{(2)}$	1.012348
$i/i^{(4)}$	1.018559
$i/i^{(12)}$	1.022715
i/δ	1.024797
$i/d^{(2)}$	1.037348
$i/d^{(4)}$	1.031059
$i/d^{(12)}$	1.026881
i/δ	1.024797

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\mid}$	$s_{\overline{n}\mid}$	$1/s_{\overline{n}\mid}$
1	0.952381	1.05000	0.95238	1.00000	1.000000
2	0.907029	1.10250	1.85941	2.05000	0.487805
3	0.863838	1.15763	2.72325	3.15250	0.317209
4	0.822702	1.21551	3.54595	4.31013	0.232012
5	0.783526	1.27628	4.32948	5.52563	0.180975
6	0.746215	1.34010	5.07569	6.80191	0.147017
7	0.710681	1.40710	5.78637	8.14201	0.122820
8	0.676839	1.47746	6.46321	9.54911	0.104722
9	0.644609	1.55133	7.10782	11.02656	0.090690
10	0.613913	1.62889	7.72173	12.57789	0.079505
11	0.584679	1.71034	8.30641	14.20679	0.070389
12	0.556837	1.79586	8.86325	15.91713	0.062825
13	0.530321	1.88565	9.39357	17.71298	0.056456
14	0.505068	1.97993	9.89864	19.59863	0.051024
15	0.481017	2.07893	10.37966	21.57856	0.046342
16	0.458112	2.18287	10.83777	23.65749	0.042270
17	0.436297	2.29202	11.27407	25.84037	0.038699
18	0.415521	2.40662	11.68959	28.13238	0.035546
19	0.395734	2.52695	12.08532	30.53900	0.032745
20	0.376889	2.65330	12.46221	33.06595	0.030243
21	0.358942	2.78596	12.82115	35.71925	0.027996
22	0.341850	2.92526	13.16300	38.50521	0.025971
23	0.325571	3.07152	13.48857	41.43048	0.024137
24	0.310068	3.22510	13.79864	44.50200	0.022471
25	0.295303	3.38635	14.09394	47.72710	0.020952
26	0.281241	3.55567	14.37519	51.11345	0.019564
27	0.267848	3.73346	14.64303	54.66913	0.018292
28	0.255094	3.92013	14.89813	58.40258	0.017123
29	0.242946	4.11614	15.14107	62.32271	0.016046
30	0.231377	4.32194	15.37245	66.43885	0.015051
31	0.220359	4.53804	15.59281	70.76079	0.014132
32	0.209866	4.76494	15.80268	75.29883	0.013280
33	0.199873	5.00319	16.00255	80.06377	0.012490
34	0.190355	5.25335	16.19290	85.06696	0.011755
35	0.181290	5.51602	16.37419	90.32031	0.011072
36	0.172657	5.79182	16.54685	95.83632	0.010434
37	0.164436	6.08141	16.71129	101.62814	0.009840
38	0.156605	6.38548	16.86789	107.70955	0.009284
39	0.149148	6.70475	17.01704	114.09502	0.008765
40	0.142046	7.03999	17.15909	120.79977	0.008278
41	0.135282	7.39199	17.29437	127.83976	0.007822
42	0.128840	7.76159	17.42321	135.23175	0.007395
43	0.122704	8.14967	17.54591	142.99334	0.006993
44	0.116861	8.55715	17.66277	151.14301	0.006616
45	0.111297	8.98501	17.77407	159.70016	0.006262
46	0.105997	9.43426	17.88007	168.68516	0.005928
47	0.100949	9.90597	17.98102	178.11942	0.005614
48	0.096142	10.40127	18.07716	188.02539	0.005318
49	0.091564	10.92133	18.16872	198.42666	0.005040
50	0.087204	11.46740	18.25593	209.34800	0.004777

常量	
函数	值
i	0.060000
$i^{(2)}$	0.059126
$i^{(4)}$	0.058695
$i^{(12)}$	0.058411
δ	0.058269
d	0.056604
$d^{(2)}$	0.057428
$d^{(4)}$	0.057847
$d^{(12)}$	0.058128
δ	0.058269
v	0.943396
$v^{1/2}$	0.971286
$v^{1/4}$	0.985538
$v^{1/12}$	0.995156
$1+i$	1.060000
$(1+i)^{1/2}$	1.029563
$(1+i)^{1/4}$	1.014674
$(1+i)^{1/12}$	1.004868
$i/i^{(2)}$	1.014782
$i/i^{(4)}$	1.022227
$i/i^{(12)}$	1.027211
i/δ	1.029709
$i/d^{(2)}$	1.044782
$i/d^{(4)}$	1.037227
$i/d^{(12)}$	1.032211
i/δ	1.029709

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.943396	1.06000	0.94340	1.00000	1.000000
2	0.889996	1.12360	1.83339	2.06000	0.485437
3	0.839619	1.19102	2.67301	3.18360	0.314110
4	0.792094	1.26248	3.46511	4.37462	0.228591
5	0.747258	1.33823	4.21236	5.63709	0.177396
6	0.704961	1.41852	4.91732	6.97532	0.143363
7	0.665057	1.50363	5.58238	8.39384	0.119135
8	0.627412	1.59385	6.20979	9.89747	0.101036
9	0.591898	1.68948	6.80169	11.49132	0.087022
10	0.558395	1.79085	7.36009	13.18079	0.075868
11	0.526788	1.89830	7.88687	14.97164	0.066793
12	0.496969	2.01220	8.38384	16.86994	0.059277
13	0.468839	2.13293	8.85268	18.88214	0.052960
14	0.442301	2.26090	9.29498	21.01507	0.047585
15	0.417265	2.39656	9.71225	23.27597	0.042963
16	0.393646	2.54035	10.10590	25.67253	0.038952
17	0.371364	2.69277	10.47726	28.21288	0.035445
18	0.350344	2.85434	10.82760	30.90565	0.032357
19	0.330513	3.02560	11.15812	33.75999	0.029621
20	0.311805	3.20714	11.46992	36.78559	0.027185
21	0.294155	3.39956	11.76408	39.99273	0.025005
22	0.277505	3.60354	12.04158	43.39229	0.023046
23	0.261797	3.81975	12.30338	46.99583	0.021278
24	0.246979	4.04893	12.55036	50.81558	0.019679
25	0.232999	4.29187	12.78336	54.86451	0.018227
26	0.219810	4.54938	13.00317	59.15638	0.016904
27	0.207368	4.82235	13.21053	63.70577	0.015697
28	0.195630	5.11169	13.40616	68.52811	0.014593
29	0.184557	5.41839	13.59072	73.63980	0.013580
30	0.174110	5.74349	13.76483	79.05819	0.012649
31	0.164255	6.08810	13.92909	84.80168	0.011792
32	0.154957	6.45339	14.08404	90.88978	0.011002
33	0.146186	6.84059	14.23023	97.34316	0.010273
34	0.137912	7.25103	14.36814	104.18375	0.009598
35	0.130105	7.68609	14.49825	111.43478	0.008974
36	0.122741	8.14725	14.62099	119.12087	0.008395
37	0.115793	8.63609	14.73678	127.26812	0.007857
38	0.109239	9.15425	14.84602	135.90421	0.007358
39	0.103056	9.70351	14.94907	145.05846	0.006894
40	0.097222	10.28572	15.04630	154.76197	0.006462
41	0.091719	10.90286	15.13802	165.04768	0.006059
42	0.086527	11.55703	15.22454	175.95054	0.005683
43	0.081630	12.25045	15.30617	187.50758	0.005333
44	0.077009	12.98548	15.38318	199.75803	0.005006
45	0.072650	13.76461	15.45583	212.74351	0.004700
46	0.068538	14.59049	15.52437	226.50812	0.004415
47	0.064658	15.46592	15.58903	241.09861	0.004148
48	0.060998	16.39387	15.65003	256.56453	0.003898
49	0.057546	17.37750	15.70757	272.95840	0.003664
50	0.054288	18.42015	15.76186	290.33590	0.003444

常量	
函数	值
i	0.070000
$i^{(2)}$	0.068816
$i^{(4)}$	0.068234
$i^{(12)}$	0.067850
δ	0.067659
d	0.065421
$d^{(2)}$	0.066527
$d^{(4)}$	0.067090
$d^{(12)}$	0.067468
δ	0.067659
v	0.934579
$v^{1/2}$	0.966736
$v^{1/4}$	0.983228
$v^{1/12}$	0.994378
$1+i$	1.070000
$(1+i)^{1/2}$	1.034408
$(1+i)^{1/4}$	1.017059
$(1+i)^{1/12}$	1.005654
$i/i^{(2)}$	1.017204
$i/i^{(4)}$	1.025880
$i/i^{(12)}$	1.031691
i/δ	1.034605
$i/d^{(2)}$	1.052204
$i/d^{(4)}$	1.043380
$i/d^{(12)}$	1.037525
i/δ	1.034605

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.934579	1.07000	0.93458	1.00000	1.000000
2	0.873439	1.14490	1.80802	2.07000	0.483092
3	0.816298	1.22504	2.62432	3.21490	0.311052
4	0.762895	1.31080	3.38721	4.43994	0.225228
5	0.712986	1.40255	4.10020	5.75074	0.173891
6	0.666342	1.50073	4.76654	7.15329	0.139796
7	0.622750	1.60578	5.38929	8.65402	0.115553
8	0.582009	1.71819	5.97130	10.25980	0.097468
9	0.543934	1.83846	6.51523	11.97799	0.083486
10	0.508349	1.96715	7.02358	13.81645	0.072378
11	0.475093	2.10485	7.49867	15.78360	0.063357
12	0.444012	2.25219	7.94269	17.88845	0.055902
13	0.414964	2.40985	8.35765	20.14064	0.049651
14	0.387817	2.57853	8.74547	22.55049	0.044345
15	0.362446	2.75903	9.10791	25.12902	0.039795
16	0.338735	2.95216	9.44665	27.88805	0.035858
17	0.316574	3.15882	9.76322	30.84022	0.032425
18	0.295864	3.37993	10.05909	33.99903	0.029413
19	0.276508	3.61653	10.33560	37.37896	0.026753
20	0.258419	3.86968	10.59401	40.99549	0.024393
21	0.241513	4.14056	10.83553	44.86518	0.022289
22	0.225713	4.43040	11.06124	49.00574	0.020406
23	0.210947	4.74053	11.27219	53.43614	0.018714
24	0.197147	5.07237	11.46933	58.17667	0.017189
25	0.184249	5.42743	11.65358	63.24904	0.015811
26	0.172195	5.80735	11.82578	68.67647	0.014561
27	0.160930	6.21387	11.98671	74.48382	0.013426
28	0.150402	6.64884	12.13711	80.69769	0.012392
29	0.140563	7.11426	12.27767	87.34653	0.011449
30	0.131367	7.61226	12.40904	94.46079	0.010586
31	0.122773	8.14511	12.53181	102.07304	0.009797
32	0.114741	8.71527	12.64656	110.21815	0.009073
33	0.107235	9.32534	12.75379	118.93343	0.008408
34	0.100219	9.97811	12.85401	128.25876	0.007797
35	0.093663	10.67658	12.94767	138.23688	0.007234
36	0.087535	11.42394	13.03521	148.91346	0.006715
37	0.081809	12.22362	13.11702	160.33740	0.006237
38	0.076457	13.07927	13.19347	172.56102	0.005795
39	0.071455	13.99482	13.26493	185.64029	0.005387
40	0.066780	14.97446	13.33171	199.63511	0.005009
41	0.062412	16.02267	13.39412	214.60957	0.004660
42	0.058329	17.14426	13.45245	230.63224	0.004336
43	0.054513	18.34435	13.50696	247.77650	0.004036
44	0.050946	19.62846	13.55791	266.12085	0.003758
45	0.047613	21.00245	13.60552	285.74931	0.003500
46	0.044499	22.47262	13.65002	306.75176	0.003260
47	0.041587	24.04571	13.69161	329.22439	0.003037
48	0.038867	25.72891	13.73047	353.27009	0.002831
49	0.036324	27.52993	13.76680	378.99900	0.002639
50	0.033948	29.45703	13.80075	406.52893	0.002460

常量	
函数	值
i	0.080000
$i^{(2)}$	0.078461
$i^{(4)}$	0.077706
$i^{(12)}$	0.077208
δ	0.076961
d	0.074074
$d^{(2)}$	0.075499
$d^{(4)}$	0.076225
$d^{(12)}$	0.076715
δ	0.076961
v	0.925926
$v^{1/2}$	0.962250
$v^{1/4}$	0.980944
$v^{1/12}$	0.993607
$1+i$	1.080000
$(1+i)^{1/2}$	1.039230
$(1+i)^{1/4}$	1.019427
$(1+i)^{1/12}$	1.006434
$i/i^{(2)}$	1.019615
$i/i^{(4)}$	1.029519
$i/i^{(12)}$	1.036157
i/δ	1.039487
$i/d^{(2)}$	1.059615
$i/d^{(4)}$	1.049519
$i/d^{(12)}$	1.042824
i/δ	1.039487

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.925926	1.08000	0.92593	1.00000	1.000000
2	0.857339	1.16640	1.78326	2.08000	0.480769
3	0.793832	1.25971	2.57710	3.24640	0.308034
4	0.735030	1.36049	3.31213	4.50611	0.221921
5	0.680583	1.46933	3.99271	5.86660	0.170456
6	0.630170	1.58687	4.62288	7.33593	0.136315
7	0.583490	1.71382	5.20637	8.92280	0.112072
8	0.540269	1.85093	5.74664	10.63663	0.094015
9	0.500249	1.99900	6.24689	12.48756	0.080080
10	0.463193	2.15892	6.71008	14.48656	0.069029
11	0.428883	2.33164	7.13896	16.64549	0.060076
12	0.397114	2.51817	7.53608	18.97713	0.052695
13	0.367698	2.71962	7.90378	21.49530	0.046522
14	0.340461	2.93719	8.24424	24.21492	0.041297
15	0.315242	3.17217	8.55948	27.15211	0.036830
16	0.291890	3.42594	8.85137	30.32428	0.032977
17	0.270269	3.70002	9.12164	33.75023	0.029629
18	0.250249	3.99602	9.37189	37.45024	0.026702
19	0.231712	4.31570	9.60360	41.44626	0.024128
20	0.214548	4.66096	9.81815	45.76196	0.021852
21	0.198656	5.03383	10.01680	50.42292	0.019832
22	0.183941	5.43654	10.20074	55.45676	0.018032
23	0.170315	5.87146	10.37106	60.89330	0.016422
24	0.157699	6.34118	10.52876	66.76476	0.014978
25	0.146018	6.84848	10.67478	73.10594	0.013679
26	0.135202	7.39635	10.80998	79.95442	0.012507
27	0.125187	7.98806	10.93516	87.35077	0.011448
28	0.115914	8.62711	11.05108	95.33883	0.010489
29	0.107328	9.31727	11.15841	103.96594	0.009619
30	0.099377	10.06266	11.25778	113.28321	0.008827
31	0.092016	10.86767	11.34980	123.34587	0.008107
32	0.085200	11.73708	11.43500	134.21354	0.007451
33	0.078889	12.67605	11.51389	145.95062	0.006852
34	0.073045	13.69013	11.58693	158.62667	0.006304
35	0.067635	14.78534	11.65457	172.31680	0.005803
36	0.062625	15.96817	11.71719	187.10215	0.005345
37	0.057986	17.24563	11.77518	203.07032	0.004924
38	0.053690	18.62528	11.82887	220.31595	0.004539
39	0.049713	20.11530	11.87858	238.94122	0.004185
40	0.046031	21.72452	11.92461	259.05652	0.003860
41	0.042621	23.46248	11.96723	280.78104	0.003561
42	0.039464	25.33948	12.00670	304.24352	0.003287
43	0.036541	27.36664	12.04324	329.58301	0.003034
44	0.033834	29.55597	12.07707	356.94965	0.002802
45	0.031328	31.92045	12.10840	386.50562	0.002587
46	0.029007	34.47409	12.13741	418.42607	0.002390
47	0.026859	37.23201	12.16427	452.90015	0.002208
48	0.024869	40.21057	12.18914	490.13216	0.002040
49	0.023027	43.42742	12.21216	530.34274	0.001886
50	0.021321	46.90161	12.23348	573.77016	0.001743

常量	
函数	值
i	0.090000
$i^{(2)}$	0.088061
$i^{(4)}$	0.087113
$i^{(12)}$	0.086488
δ	0.086178
d	0.082569
$d^{(2)}$	0.084347
$d^{(4)}$	0.085256
$d^{(12)}$	0.085869
δ	0.086178
v	0.917431
$v^{1/2}$	0.957826
$v^{1/4}$	0.978686
$v^{1/12}$	0.992844
$1+i$	1.090000
$(1+i)^{1/2}$	1.044031
$(1+i)^{1/4}$	1.021778
$(1+i)^{1/12}$	1.007207
$i/i^{(2)}$	1.022015
$i/i^{(4)}$	1.033144
$i/i^{(12)}$	1.040608
i/δ	1.044354
$i/d^{(2)}$	1.067015
$i/d^{(4)}$	1.055644
$i/d^{(12)}$	1.048108
i/δ	1.044354

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.917431	1.09000	0.91743	1.00000	1.000000
2	0.841680	1.18810	1.75911	2.09000	0.478469
3	0.772183	1.29503	2.53129	3.27810	0.305055
4	0.708425	1.41158	3.23972	4.57313	0.218669
5	0.649931	1.53862	3.88965	5.98471	0.167092
6	0.596267	1.67710	4.48592	7.52333	0.132920
7	0.547034	1.82804	5.03295	9.20043	0.108691
8	0.501866	1.99256	5.53482	11.02847	0.090674
9	0.460428	2.17189	5.99525	13.02104	0.076799
10	0.422411	2.36736	6.41766	15.19293	0.065820
11	0.387533	2.58043	6.80519	17.56029	0.056947
12	0.355535	2.81266	7.16073	20.14072	0.049651
13	0.326179	3.06580	7.48690	22.95338	0.043567
14	0.299246	3.34173	7.78615	26.01919	0.038433
15	0.274538	3.64248	8.06069	29.36092	0.034059
16	0.251870	3.97031	8.31256	33.00340	0.030300
17	0.231073	4.32763	8.54363	36.97370	0.027046
18	0.211994	4.71712	8.75563	41.30134	0.024212
19	0.194490	5.14166	8.95011	46.01846	0.021730
20	0.178431	5.60441	9.12855	51.16012	0.019546
21	0.163698	6.10881	9.29224	56.76453	0.017617
22	0.150182	6.65860	9.44243	62.87334	0.015905
23	0.137781	7.25787	9.58021	69.53194	0.014382
24	0.126405	7.91108	9.70661	76.78981	0.013023
25	0.115968	8.62308	9.82258	84.70090	0.011806
26	0.106393	9.39916	9.92897	93.32398	0.010715
27	0.097608	10.24508	10.02658	102.72313	0.009735
28	0.089548	11.16714	10.11613	112.96822	0.008852
29	0.082155	12.17218	10.19828	124.13536	0.008056
30	0.075371	13.26768	10.27365	136.30754	0.007336
31	0.069148	14.46177	10.34280	149.57522	0.006686
32	0.063438	15.76333	10.40624	164.03699	0.006096
33	0.058200	17.18203	10.46444	179.80032	0.005562
34	0.053395	18.72841	10.51784	196.98234	0.005077
35	0.048986	20.41397	10.56682	215.71075	0.004636
36	0.044941	22.25123	10.61176	236.12472	0.004235
37	0.041231	24.25384	10.65299	258.37595	0.003870
38	0.037826	26.43668	10.69082	282.62978	0.003538
39	0.034703	28.81598	10.72552	309.06646	0.003236
40	0.031838	31.40942	10.75736	337.88245	0.002960
41	0.029209	34.23627	10.78657	369.29187	0.002708
42	0.026797	37.31753	10.81337	403.52813	0.002478
43	0.024584	40.67611	10.83795	440.84566	0.002268
44	0.022555	44.33696	10.86051	481.52177	0.002077
45	0.020692	48.32729	10.88120	525.85873	0.001902
46	0.018984	52.67674	10.90018	574.18602	0.001742
47	0.017416	57.41765	10.91760	626.86276	0.001595
48	0.015978	62.58524	10.93358	684.28041	0.001461
49	0.014659	68.21791	10.94823	746.86565	0.001339
50	0.013449	74.35752	10.96168	815.08356	0.001227

常量	
函数	值
i	0.100000
$i^{(2)}$	0.097618
$i^{(4)}$	0.096455
$i^{(12)}$	0.095690
δ	0.095310
d	0.090909
$d^{(2)}$	0.093075
$d^{(4)}$	0.094184
$d^{(12)}$	0.094933
δ	0.095310
v	0.909091
$v^{1/2}$	0.953463
$v^{1/4}$	0.976454
$v^{1/12}$	0.992089
$1+i$	1.100000
$(1+i)^{1/2}$	1.048809
$(1+i)^{1/4}$	1.024114
$(1+i)^{1/12}$	1.007974
$i/i^{(2)}$	1.024404
$i/i^{(4)}$	1.036756
$i/i^{(12)}$	1.045045
i/δ	1.049206
$i/d^{(2)}$	1.074404
$i/d^{(4)}$	1.061756
$i/d^{(12)}$	1.053378
i/δ	1.049206

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.909091	1.10000	0.90909	1.00000	1.000000
2	0.826446	1.21000	1.73554	2.10000	0.476190
3	0.751315	1.33100	2.48685	3.31000	0.302115
4	0.683013	1.46410	3.16987	4.64100	0.215471
5	0.620921	1.61051	3.79079	6.10510	0.163797
6	0.564474	1.77156	4.35526	7.71561	0.129607
7	0.513158	1.94872	4.86842	9.48717	0.105405
8	0.466507	2.14359	5.33493	11.43589	0.087444
9	0.424098	2.35795	5.75902	13.57948	0.073641
10	0.385543	2.59374	6.14457	15.93742	0.062745
11	0.350494	2.85312	6.49506	18.53117	0.053963
12	0.318631	3.13843	6.81369	21.38428	0.046763
13	0.289664	3.45227	7.10336	24.52271	0.040779
14	0.263331	3.79750	7.36669	27.97498	0.035746
15	0.239392	4.17725	7.60608	31.77248	0.031474
16	0.217629	4.59497	7.82371	35.94973	0.027817
17	0.197845	5.05447	8.02155	40.54470	0.024664
18	0.179859	5.55992	8.20141	45.59917	0.021930
19	0.163508	6.11591	8.36492	51.15909	0.019547
20	0.148644	6.72750	8.51356	57.27500	0.017460
21	0.135131	7.40025	8.64869	64.00250	0.015624
22	0.122846	8.14027	8.77154	71.40275	0.014005
23	0.111678	8.95430	8.88322	79.54302	0.012572
24	0.101526	9.84973	8.98474	88.49733	0.011300
25	0.092296	10.83471	9.07704	98.34706	0.010168
26	0.083905	11.91818	9.16095	109.18177	0.009159
27	0.076278	13.10999	9.23722	121.09994	0.008258
28	0.069343	14.42099	9.30657	134.20994	0.007451
29	0.063039	15.86309	9.36961	148.63093	0.006728
30	0.057309	17.44940	9.42691	164.49402	0.006079
31	0.052099	19.19434	9.47901	181.94342	0.005496
32	0.047362	21.11378	9.52638	201.13777	0.004972
33	0.043057	23.22515	9.56943	222.25154	0.004499
34	0.039143	25.54767	9.60857	245.47670	0.004074
35	0.035584	28.10244	9.64416	271.02437	0.003690
36	0.032349	30.91268	9.67651	299.12681	0.003343
37	0.029408	34.00395	9.70592	330.03949	0.003030
38	0.026735	37.40434	9.73265	364.04343	0.002747
39	0.024304	41.14478	9.75696	401.44778	0.002491
40	0.022095	45.25926	9.77905	442.59256	0.002259
41	0.020086	49.78518	9.79914	487.85181	0.002050
42	0.018260	54.76370	9.81740	537.63699	0.001860
43	0.016600	60.24007	9.83400	592.40069	0.001688
44	0.015091	66.26408	9.84909	652.64076	0.001532
45	0.013719	72.89048	9.86281	718.90484	0.001391
46	0.012472	80.17953	9.87528	791.79532	0.001263
47	0.011338	88.19749	9.88662	871.97485	0.001147
48	0.010307	97.01723	9.89693	960.17234	0.001041
49	0.009370	106.71896	9.90630	1057.18957	0.000946
50	0.008519	117.39085	9.91481	1163.90853	0.000859

常量	
函数	值
i	0.120000
$i^{(2)}$	0.116601
$i^{(4)}$	0.114949
$i^{(12)}$	0.113866
δ	0.113329
d	0.107143
$d^{(2)}$	0.110178
$d^{(4)}$	0.111738
$d^{(12)}$	0.112795
δ	0.113329
v	0.892857
$v^{1/2}$	0.944911
$v^{1/4}$	0.972065
$v^{1/12}$	0.990600
$1+i$	1.120000
$(1+i)^{1/2}$	1.058301
$(1+i)^{1/4}$	1.028737
$(1+i)^{1/12}$	1.009489
$i/i^{(2)}$	1.029150
$i/i^{(4)}$	1.043938
$i/i^{(12)}$	1.053875
i/δ	1.058867
$i/d^{(2)}$	1.089150
$i/d^{(4)}$	1.073938
$i/d^{(12)}$	1.063875
i/δ	1.058867

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.892857	1.12000	0.89286	1.00000	1.000000
2	0.797194	1.25440	1.69005	2.12000	0.471698
3	0.711780	1.40493	2.40183	3.37440	0.296349
4	0.635518	1.57352	3.03735	4.77933	0.209234
5	0.567427	1.76234	3.60478	6.35285	0.157410
6	0.506631	1.97382	4.11141	8.11519	0.123226
7	0.452349	2.21068	4.56376	10.08901	0.099118
8	0.403883	2.47596	4.96764	12.29969	0.081303
9	0.360610	2.77308	5.32825	14.77566	0.067679
10	0.321973	3.10585	5.65022	17.54874	0.056984
11	0.287476	3.47855	5.93770	20.65458	0.048415
12	0.256675	3.89598	6.19437	24.13313	0.041437
13	0.229174	4.36349	6.42355	28.02911	0.035677
14	0.204620	4.88711	6.62817	32.39260	0.030871
15	0.182696	5.47357	6.81086	37.27971	0.026824
16	0.163122	6.13039	6.97399	42.75328	0.023390
17	0.145644	6.86604	7.11963	48.88367	0.020457
18	0.130040	7.68997	7.24967	55.74971	0.017937
19	0.116107	8.61276	7.36578	63.43968	0.015763
20	0.103667	9.64629	7.46944	72.05244	0.013879
21	0.092560	10.80385	7.56200	81.69874	0.012240
22	0.082643	12.10031	7.64465	92.50258	0.010811
23	0.073788	13.55235	7.71843	104.60289	0.009560
24	0.065882	15.17863	7.78432	118.15524	0.008463
25	0.058823	17.00006	7.84314	133.33387	0.007500
26	0.052521	19.04007	7.89566	150.33393	0.006652
27	0.046894	21.32488	7.94255	169.37401	0.005904
28	0.041869	23.88387	7.98442	190.69889	0.005244
29	0.037383	26.74993	8.02181	214.58275	0.004660
30	0.033378	29.95992	8.05518	241.33268	0.004144
31	0.029802	33.55511	8.08499	271.29261	0.003686
32	0.026609	37.58173	8.11159	304.84772	0.003280
33	0.023758	42.09153	8.13535	342.42945	0.002920
34	0.021212	47.14252	8.15656	384.52098	0.002601
35	0.018940	52.79962	8.17550	431.66350	0.002317
36	0.016910	59.13557	8.19241	484.46312	0.002064
37	0.015098	66.23184	8.20751	543.59869	0.001840
38	0.013481	74.17966	8.22099	609.83053	0.001640
39	0.012036	83.08122	8.23303	684.01020	0.001462
40	0.010747	93.05097	8.24378	767.09142	0.001304
41	0.009595	104.21709	8.25337	860.14239	0.001163
42	0.008567	116.72314	8.26194	964.35948	0.001037
43	0.007649	130.72991	8.26959	1081.08262	0.000925
44	0.006830	146.41750	8.27642	1211.81253	0.000825
45	0.006098	163.98760	8.28252	1358.23003	0.000736
46	0.005445	183.66612	8.28796	1522.21764	0.000657
47	0.004861	205.70605	8.29282	1705.88375	0.000586
48	0.004340	230.39078	8.29716	1911.58980	0.000523
49	0.003875	258.03767	8.30104	2141.98058	0.000467
50	0.003460	289.00219	8.30450	2400.01825	0.000417

常量	
函数	值
i	0.150000
$i^{(2)}$	0.144761
$i^{(4)}$	0.142232
$i^{(12)}$	0.140579
δ	0.139762
d	0.130435
$d^{(2)}$	0.134990
$d^{(4)}$	0.137348
$d^{(12)}$	0.138951
δ	0.139762
v	0.869565
$v^{1/2}$	0.932505
$v^{1/4}$	0.965663
$v^{1/12}$	0.988421
$1+i$	1.150000
$(1+i)^{1/2}$	1.072381
$(1+i)^{1/4}$	1.035558
$(1+i)^{1/12}$	1.011715
$i/i^{(2)}$	1.036190
$i/i^{(4)}$	1.054613
$i/i^{(12)}$	1.067016
i/δ	1.073254
$i/d^{(2)}$	1.111190
$i/d^{(4)}$	1.092113
$i/d^{(12)}$	1.079516
i/δ	1.073254

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\|}$	$s_{\overline{n}\|}$	$1/s_{\overline{n}\|}$
1	0.869565	1.15000	0.86957	1.00000	1.000000
2	0.756144	1.32250	1.62571	2.15000	0.465116
3	0.657516	1.52088	2.28323	3.47250	0.287977
4	0.571753	1.74901	2.85498	4.99338	0.200265
5	0.497177	2.01136	3.35216	6.74238	0.148316
6	0.432328	2.31306	3.78448	8.75374	0.114237
7	0.375937	2.66002	4.16042	11.06680	0.090360
8	0.326902	3.05902	4.48732	13.72682	0.072850
9	0.284262	3.51788	4.77158	16.78584	0.059574
10	0.247185	4.04556	5.01877	20.30372	0.049252
11	0.214943	4.65239	5.23371	24.34928	0.041069
12	0.186907	5.35025	5.42062	29.00167	0.034481
13	0.162528	6.15279	5.58315	34.35192	0.029110
14	0.141329	7.07571	5.72448	40.50471	0.024688
15	0.122894	8.13706	5.84737	47.58041	0.021017
16	0.106865	9.35762	5.95423	55.71747	0.017948
17	0.092926	10.76126	6.04716	65.07509	0.015367
18	0.080805	12.37545	6.12797	75.83636	0.013186
19	0.070265	14.23177	6.19823	88.21181	0.011336
20	0.061100	16.36654	6.25933	102.44358	0.009761
21	0.053131	18.82152	6.31246	118.81012	0.008417
22	0.046201	21.64475	6.35866	137.63164	0.007266
23	0.040174	24.89146	6.39884	159.27638	0.006278
24	0.034934	28.62518	6.43377	184.16784	0.005430
25	0.030378	32.91895	6.46415	212.79302	0.004699
26	0.026415	37.85680	6.49056	245.71197	0.004070
27	0.022970	43.53531	6.51353	283.56877	0.003526
28	0.019974	50.06561	6.53351	327.10408	0.003057
29	0.017369	57.57545	6.55088	377.16969	0.002651
30	0.015103	66.21177	6.56598	434.74515	0.002300
31	0.013133	76.14354	6.57911	500.95692	0.001996
32	0.011420	87.56507	6.59053	577.10046	0.001733
33	0.009931	100.69983	6.60046	664.66552	0.001505
34	0.008635	115.80480	6.60910	765.36535	0.001307
35	0.007509	133.17552	6.61661	881.17016	0.001135
36	0.006529	153.15185	6.62314	1014.34568	0.000986
37	0.005678	176.12463	6.62881	1167.49753	0.000857
38	0.004937	202.54332	6.63375	1343.62216	0.000744
39	0.004293	232.92482	6.63805	1546.16549	0.000647
40	0.003733	267.86355	6.64178	1779.09031	0.000562
41	0.003246	308.04308	6.64502	2046.95385	0.000489
42	0.002823	354.24954	6.64785	2354.99693	0.000425
43	0.002455	407.38697	6.65030	2709.24647	0.000369
44	0.002134	468.49502	6.65244	3116.63344	0.000321
45	0.001856	538.76927	6.65429	3585.12846	0.000279
46	0.001614	619.58466	6.65591	4123.89773	0.000242
47	0.001403	712.52236	6.65731	4743.48239	0.000211
48	0.001220	819.40071	6.65853	5456.00475	0.000183
49	0.001061	942.31082	6.65959	6275.40546	0.000159
50	0.000923	1083.65744	6.66051	7217.71628	0.000139

常量	
函数	值
i	0.200000
$i^{(2)}$	0.190890
$i^{(4)}$	0.186541
$i^{(12)}$	0.183714
δ	0.182322
d	0.166667
$d^{(2)}$	0.174258
$d^{(4)}$	0.178229
$d^{(12)}$	0.180943
δ	0.182322
v	0.833333
$v^{1/2}$	0.912871
$v^{1/4}$	0.955443
$v^{1/12}$	0.984921
$1+i$	1.200000
$(1+i)^{1/2}$	1.095445
$(1+i)^{1/4}$	1.046635
$(1+i)^{1/12}$	1.015309
$i/i^{(2)}$	1.047723
$i/i^{(4)}$	1.072153
$i/i^{(12)}$	1.088651
i/δ	1.096963
$i/d^{(2)}$	1.147723
$i/d^{(4)}$	1.122153
$i/d^{(12)}$	1.105317
i/δ	1.096963

折现因子、积累因子、标准型年金现值及积累值					
n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.833333	1.20000	0.83333	1.00000	1.000000
2	0.694444	1.44000	1.52778	2.20000	0.454545
3	0.578704	1.72800	2.10648	3.64000	0.274725
4	0.482253	2.07360	2.58873	5.36800	0.186289
5	0.401878	2.48832	2.99061	7.44160	0.134380
6	0.334898	2.98598	3.32551	9.92992	0.100706
7	0.279082	3.58318	3.60459	12.91590	0.077424
8	0.232568	4.29982	3.83716	16.49908	0.060609
9	0.193807	5.15978	4.03097	20.79890	0.048079
10	0.161506	6.19174	4.19247	25.95868	0.038523
11	0.134588	7.43008	4.32706	32.15042	0.031104
12	0.112157	8.91610	4.43922	39.58050	0.025265
13	0.093464	10.69932	4.53268	48.49660	0.020620
14	0.077887	12.83918	4.61057	59.19592	0.016893
15	0.064905	15.40702	4.67547	72.03511	0.013882
16	0.054088	18.48843	4.72956	87.44213	0.011436
17	0.045073	22.18611	4.77463	105.93056	0.009440
18	0.037561	26.62333	4.81219	128.11667	0.007805
19	0.031301	31.94800	4.84350	154.74000	0.006462
20	0.026084	38.33760	4.86958	186.68800	0.005357
21	0.021737	46.00512	4.89132	225.02560	0.004444
22	0.018114	55.20614	4.90943	271.03072	0.003690
23	0.015095	66.24737	4.92453	326.23686	0.003065
24	0.012579	79.49685	4.93710	392.48424	0.002548
25	0.010483	95.39622	4.94759	471.98108	0.002119
26	0.008735	114.47546	4.95632	567.37730	0.001762
27	0.007280	137.37055	4.96360	681.85276	0.001467
28	0.006066	164.84466	4.96967	819.22331	0.001221
29	0.005055	197.81359	4.97472	984.06797	0.001016
30	0.004213	237.37631	4.97894	1181.88157	0.000846
31	0.003511	284.85158	4.98245	1419.25788	0.000705
32	0.002926	341.82189	4.98537	1704.10946	0.000587
33	0.002438	410.18627	4.98781	2045.93135	0.000489
34	0.002032	492.22352	4.98984	2456.11762	0.000407
35	0.001693	590.66823	4.99154	2948.34115	0.000339
36	0.001411	708.80187	4.99295	3539.00937	0.000283
37	0.001176	850.56225	4.99412	4247.81125	0.000235
38	0.000980	1020.67470	4.99510	5098.37350	0.000196
39	0.000816	1224.80964	4.99592	6119.04820	0.000163
40	0.000680	1469.77157	4.99660	7343.85784	0.000136
41	0.000567	1763.72588	4.99717	8813.62941	0.000113
42	0.000472	2116.47106	4.99764	10577.35529	0.000095
43	0.000394	2539.76527	4.99803	12693.82635	0.000079
44	0.000328	3047.71832	4.99836	15233.59162	0.000066
45	0.000273	3657.26199	4.99863	18281.30994	0.000055
46	0.000228	4388.71439	4.99886	21938.57193	0.000046
47	0.000190	5266.45726	4.99905	26327.28631	0.000038
48	0.000158	6319.74872	4.99921	31593.74358	0.000032
49	0.000132	7583.69846	4.99934	37913.49229	0.000026
50	0.000110	9100.43815	4.99945	45497.19075	0.000022