

# 精算建模：车险无赔款优待 (NCD)

## 参考答案及批改评述 (Chap 6)

庄源

日期：2023 年 12 月 23 日

### 目录

<b>1</b>	<b>Question 3: Multiple-step transition in Markov chain</b>	<b>2</b>
1.1	原题 . . . . .	2
1.2	参考答案 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Question 4: Chapman-Kolmogorov equation</b>	<b>3</b>
2.1	原题 . . . . .	3
2.2	参考答案 . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Question 5: Equilibrium distribution of Markov chain</b>	<b>4</b>
3.1	原题 . . . . .	4
3.2	参考答案 . . . . .	5
<b>4</b>	<b>批改评述总结</b>	<b>5</b>

## 1 Question 3: Multiple-step transition in Markov chain

注. 本题制作了计算使用的 R 语言代码, 可下载学习。[[下载](#)]

### 1.1 原题

Use a basic text editor to make a text file as follows, and "source it" or bring it into R. (Note: Any line in a text file beginning with # is ignored by R.) The text file below will create the matrix of transition probabilities  $\mathbf{P}$  in Example 6.1. What is  $\mathbf{P}^8$  ?

```
# NCD Example 1
ex1<-c(0.3,0.7,0,0.3,0,0.7,0.1,0.2,0.7)
P1 <- matrix(ex1,ncol = 3,byrow = T)
P2 <- P1%*%P1
P4 <- P2%*%P2
P8 <- P4%*%P4
```

### 1.2 参考答案

将题目中所述代码在 R 中运行, 可得到  $\mathbf{P}^8$  的表示:

```
# 制作相应转移概率矩阵
ex1 <- c(0.3, 0.7, 0, 0.3, 0, 0.7, 0.1, 0.2, 0.7)
# 计算多步概率转移
P1 <- matrix(ex1, ncol = 3, byrow = T)
P2 <- P1 %*% P1
P4 <- P2 %*% P2
P8 <- P4 %*% P4
P8
```

```
##           [,1]      [,2]      [,3]
## [1,] 0.1863592 0.2440922 0.5695486
## [2,] 0.1859750 0.2444764 0.5695486
## [3,] 0.1859750 0.2440922 0.5699327
```

可以看出, 无论是从 1/2/3 哪种状态出发, 在 8 步转移后, 在各状态的比例均为 18.6%、24.4% 和 57.0%。

## 2 Question 4: Chapman-Kolmogorov equation

注. 本题制作了计算使用的 R 语言代码, 可下载学习。[[下载](#)]

本题制作了计算使用的 EXCEL 表格, 可下载学习。[[下载](#)]

### 2.1 原题

Calculate a table similar to Table 6.3 for Example 6.1 when all 2000 policyholders start with no discount with a (pure) premium of \$600.

### 2.2 参考答案

在课本 Example 6.1 中, 转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.0 \\ 0.3 & 0.0 & 0.7 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

同时, 在状态 1/2/3 上的保费分别为 600/480/360。所有的保单持有人在一开始全部都在无折扣状态 (状态 1) 上, 所以  $\mathbf{p}^0 = (1, 0, 0)$ 。

下面使用了 C-K 方程, 计算了在第一次转移后, 不同人群所占比例:

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{P} = (1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.0 \\ 0.3 & 0.0 & 0.7 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} = (0.30, 0.70, 0)$$

第二次转移后不同人群所占的比例为:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^2 &= \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{P}^2 = (1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0.30 & 0.21 & 0.49 \\ 0.16 & 0.35 & 0.49 \\ 0.16 & 0.21 & 0.63 \end{pmatrix} \text{ 或} \\ &= \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{P} = (0.30, 0.70, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.0 \\ 0.3 & 0.0 & 0.7 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \\ &= (0.30, 0.21, 0.49) \end{aligned}$$

以第二次转移后为例, 此时的期望纯保费为  $2000 \times (0.30 \times 600 + 0.21 \times 480 + 0.49 \times 360) = 914400$ 。使用 EXCEL 或者 R 语言计算, 可以得到多步转移后各状态比例和纯保费<sup>1</sup>, 如下表所示:

<sup>1</sup>考试时一般只会叫大家计算 1-2 步转移, 更多步的转移需要通过计算机才能更高效进行。

表 1: 各步状态比例及纯保费

Discount class	$E_0$	$E_1$	$E_2$	Expected Premiums
Year n	$p_0^n$	$p_1^n$	$p_2^n$	
0	1.0000	0.0000	0.0000	1200000.0
1	0.3000	0.7000	0.0000	1032000.0
2	0.3000	0.2100	0.4900	914400.0
3	0.2020	0.3080	0.4900	890880.0
4	0.2020	0.2394	0.5586	874416.0
5	0.1883	0.2531	0.5586	871123.2
6	0.1883	0.2435	0.5682	868818.2
7	0.1864	0.2454	0.5682	868357.2
8	0.1864	0.2441	0.5695	868034.6
9	0.1861	0.2444	0.5695	867970.0
10	0.1861	0.2442	0.5697	867924.8
15	0.1860	0.2442	0.5698	867907.1
30	0.1860	0.2442	0.5698	867907.0

### 3 Question 5: Equilibrium distribution of Markov chain

注. 本题制作了计算使用的 R 语言代码, 可下载学习。[[下载](#)]

#### 3.1 原题

Let us assume for the NCD system of Example 6.2 that for an insured individual, the probabilities of making 0, 1, and  $> 1$  claims in a year are, respectively, 0.7, 0.2 and 0.1. Then the one-step transition matrix for this system (two steps back with one claim, and back to  $E_0$  with more than one claim) is:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Determine the equilibrium distribution for this NCD system.

## 3.2 参考答案

设  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6)$ , 则平稳分布的条件是: 在一步转移后, 各状态所占比例不变:

$$\pi = \pi \cdot \mathbf{P} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

整理成为方程组的形式, 有:

$$\begin{aligned} 0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.3\pi_3 + 0.1\pi_4 + 0.1\pi_5 + 0.1\pi_6 &= \pi_1 \\ 0.7\pi_1 &+ 0.2\pi_4 &= \pi_2 \\ 0.7\pi_2 &+ 0.2\pi_5 &= \pi_3 \\ 0.7\pi_3 &+ 0.2\pi_6 &= \pi_4 \\ 0.7\pi_4 &= \pi_5 \\ 0.7\pi_5 + 0.7\pi_6 &= \pi_6 \end{aligned}$$

然而, 由于随机矩阵的特性, 上面的方程组中有一个方程是冗余的。注意到  $\sum_{i=1}^6 \pi_i = 1$ , 将其加入方程组, 最终解得  $\pi = (0.2028329, 0.1711331, 0.1401983, 0.1457507, 0.1020255, 0.2380595)$ 。

上面的方程可以使用 R 语言直接解得。

```
# 录入系数矩阵
a <- c(0.7, -1, 0, 0.2, 0, 0, 0, 0.7,
      -1, 0, 0.2, 0, 0, 0, 0.7, -1,
      0, 0.2, 0, 0, 0, 0.7, -1, 0,
      0, 0, 0, 0, 0.7, -0.3,
      1, 1, 1, 1, 1, 1)
A <- matrix(a, ncol=6, byrow=T)
b <- c(0, 0, 0, 0, 0, 1)
# 解 A %*% x = b
solve(A, b)

## [1] 0.2028329 0.1711331 0.1401983 0.1457507 0.1020255 0.2380595
```

## 4 批改评述总结

本次作业共三题, 没有让各位同学交上来, 同学们阅读答案就可以。